EXEMPLARISCHE, BEZIEHUNGSREICHE AUFGABEN

Februar 2006

Erweiterung des Aufgabenpools
zur Version 3.0 (Oktober 2004)
der Bildungsstandards für Mathematik
am Ende der 8. Schulstufe

DAS ZUKUNFTSMINISTERIUM

bm:bwk

Impressum

Auftraggeber und Herausgeber: Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur: Richard Stockhammer, Johannes Baumühlner

Inhalt: Elfriede Alber, Christine Fischer, Heiner Juen, Beate Kröpfl, Sonja Machala, Angela Mortsch, Elisabeth Mürwald, Hans Christian Neureiter, Helma Ochnitzberger, Karl Josef Parisot, Christa Preis, Anna Schwendinger

Koordination und Redaktion: Anna Schwendinger
Lektorat: Inge Fritz
Satz und Layout: Elvira Muxel
Zeichnungen: Gerald Krammer

VORWORT DER FRAU BUNDESMINISTERIN

Sehr geehrte Lehrerinnen!
Sehr geehrte Lehrer!

Guter Unterricht und beste Bildungschancen für Kinder und Jugendliche beruhen auf einer erfolgreichen Schulentwicklung und einer nachhaltigen Sicherung der Qualität. Eine umfassende Bildung kann nur dann gelingen, wenn sich alle Schulpartner auf die Qualität des Lernens verlassen können. Bereits vor dem Beitritt Österreichs zur Europäischen Union ist das Schul- und Bildungswesen internationaler geworden. Die PISA-Studie macht deutlich, dass die Input-Steuerung allein nicht zu den erwünschten Ergebnissen im Bildungssystem führt. Deshalb werden in vielen europäischen Staaten Standards erarbeitet. Auch in der Initiative klasse:zukunft wurde die Erarbeitung von Bildungsstandards zur Qualitätsentwicklung von Schulen begrüßt.

Eine zentrale Aufgabe ist es, die Qualität schulischer Bildung, die Vergleichbarkeit schulischer Abschlüsse sowie die Durchlässigkeit des Bildungssystems zu sichern. Bildungsstandards sind hierbei von großer Bedeutung. Sie beschreiben nicht nur den aktuellen Stand von Lernergebnissen, sondern geben auch Hinweise auf notwendige Weiterentwicklungen für das Bildungssystem. Den Schülerinnen und Schülern, Eltern sowie Lehrerinnen und Lehrern bieten sie eine klare Orientierung über Kenntnisse und Fertigkeiten. Es entsteht eine pädagogisch wirksame Rückmeldestrategie, die allen Schulpartnern Auskünfte über die Bildungsergebnisse und die Veränderungen gibt. Dadurch wird eine noch individuellere Förderung ermöglicht, um Schülerinnen und Schüler bestmöglich auf ihren weiteren Bildungs- und Berufsweg vorzubereiten.

Die „exemplarischen, beziehungsreichen Aufgaben“ dieser Broschüre zu den Bildungsstandards im Fachbereich Mathematik auf der 8. Schulstufe wollen Denkanstöße geben und laden alle interessierten Mathematiklehrer und -lehrerinnen zur Erprobung, Diskussion und Rückmeldung ein. Nur im Austausch von Erfahrungen und durch gute Zusammenarbeit mit Ihnen als Schulexpertinnen und Schulexperten ist es möglich, das Beste für unsere Kinder und Jugendlichen zu erreichen.

Ich danke Ihnen für Ihre bisherigen Leistungen und freue mich auf Ihre aktive Mitarbeit zur Sicherung des Bildungsniveaus unserer Schülerinnen und Schüler!
Mit freundlichen Grüßen

Elisabeth Gehrer
Bundesministerin für Bildung, Wissenschaft und Kultur

Sehr geehrte Frau Kollegin!
Sehr geehrter Herr Kollege!

Beobachtet man die jüngsten Entwicklungen des Bildungswesens im internationalen Kontext, wird ein gemeinsames Bemühen in allen Ländern deutlich erkennbar: Schule soll im weitesten Sinne Grundlagen für ein handlungsfähiges Individuum schaffen, und zwar auf der Basis eines anschlussfähigen allgemeinen Kompetenzprofils als auch der Entwicklung individueller Begabungen und Interessen.

Die Entfaltung des Individuums in seinen besonderen Möglichkeiten setzt zunächst einmal die Vermittlung allgemeiner Grundqualifikationen im kognitiven und sozialen Bereich voraus. Je breiter, fundierter und vernetzter fachliche, methodische und soziale Kompetenzen vermittelt werden, desto mehr Anschlussmöglichkeiten eröffnen sich für junge Menschen.

Zur Entwicklung der kognitiven Grundqualifikationen werden auf der Basis der (Kern-)Lehrpläne und eines Kompetenzmodells auch in Österreich Bildungsstandards entwickelt, die durch den vorliegenden Aufgabenpool beispielhaft veranschaulicht werden.

Eine erfolgreiche Umsetzung der Bildungsstandards im vielfältigen und herausfordernden Kontext des Unterrichtens wird uns dann gelingen, wenn es sowohl bei der Entwicklung als auch bei der Erprobung von Bildungsstandards einen Prozess gibt, der für alle Beteiligten und Interessierten transparent gemacht wird und der anschaulich zeigt, wie Theorie (Kompetenzmodell) und Praxis (Erprobung in Pilotschulen) aufeinander abgestimmt werden.

Bei der Implementation von Bildungsstandards in Österreich wollen wir daher die Akzeptanz einer Umstellung des Unterrichts auf stärkere Ergebnisorientierung von Anfang an durch Mitwirkung aller Beteiligten – insbesondere der Lehrerinnen und Lehrer und der Fachwissenschaft – fördern.

Der präsentierte Aufgabenpool, der von einem engagierten Team unter der Leitung von MR Richard Stockhammer in einem aufwändigen und dialogischen Prozess unter Einbeziehung des Feedbacks aus den Pilotschulen erarbeitet und vorgelegt wird, soll Lehrerinnen und Lehrer in ihrem Bemühen auf Erzielen von mehr Nachhaltigkeit im Unterricht hilfreich begleiten und ihnen methodische und didaktische Orientierung geben. Die Aufgabenbeispiele dienen primär für den Einsatz im Unterricht auf allen Schulstufen der Sekundarstufe I (nicht nur in der 4. Klasse) und sind nicht als Prüfungs- oder Testaufgaben konzipiert.

Standard-Tests werden von einem eigenen Team mit Unterstützung von Testpsychologen zurzeit ebenfalls entwickelt und erprobt. Die dabei gewonnenen empirischen Daten bieten die Grundlage für die Entwicklung eines Qualitätszyklus in den Schulen.

Wir werden für die Kollegenschaft das Testverfahren ebenfalls transparent machen und jährlich zur Illustration ein paar Testitems veröffentlichen, die veranschaulichen, mit welchen Instrumenten die Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler gemessen werden. Eine Freigabe aller Testitems wird nicht erfolgen um ein „Teaching to the Test" zu vermeiden. Auch bei der Rückmeldung der Daten wird streng darauf geachtet werden, dass nur die jeweils betroffene Gruppe ihre Ergebnisse erfährt – Schüler/innen ihr Kompetenzprofil, Lehrer/innen ihr Klassenergebnis, Schulleiter/innen ihr Schulergebnis und die Schulverwaltung das Ergebnis ihres Bundeslandes in aggregierter Form.

Ich bedanke mich beim gesamten M-8-Team für die gelungene Aufgabensammlung und vorbildliche Dokumentation ihres Arbeitsprozesses und wünsche den Lehrerinnen und Lehrern alles Gute bei der Umsetzung der Bildungsstandards im Unterricht.

LSI Mag. Josef Lucyshyn
Bundeskoordinator für Bildungsstandards in Österreich

INHALT

EXEMPLARISCHE, BEZIEHUNGSREICHE AUFGABEN

Leitende Gesichtspunkte des Auftraggebers zur Weiterentwicklung des Aufgabenpools zu den Bildungsstandards für Mathematik am Ende der 8. Schulstufe

Ist jemand kompetent? – „Steht jemand mit beiden Beinen im Leben?“

„Ist jemand kompetent?“, fragt man etwa, wenn es um die Lösung eines Problems bzw. einer größeren Aufgabe geht. *(Soll ich die Heizung selbst reparieren, wer ist in meinem Umfeld so kompetent, dass ich ihn um Rat fragen kann?)*

Dabei geht es um die Stimmigkeit folgender Handlungsfähigkeiten, anders ausgedrückt: „Mit beiden Beinen im Leben stehen“ meint: zielbewusst, qualitätsbewusst und effizient sein, über ein Repertoire an Techniken verfügen, angemessen auf die besondere Situation eingehen, gut kommunizieren.

„Ist jemand kompetent?“ ist die Leitfrage bei der Entwicklung der Bildungsstandards. Wie wird diese Frage fassbar? Wir glauben, es gibt keinen Königsweg. Viele wollen und sollen dabei mitreden: Fachdidaktiker/innen, Tester/innen, Praktiker/innen, Lehrer/innen, erfahrene Leute aus allen Lebensbereichen. Gibt es einen Schnittpunkt all dieser „Expert/innen“? Wir sind überzeugt, über Aufgaben sollten sich alle verständigen können.

Bei der Klärung, was künftige Bildungsstandards sein sollen, kommt Aufgaben eine besondere Rolle zu.
Mit Blick auf Aufgaben können Alt und Jung gemeinsam in die Zukunft schauen. Wie schwer oder leicht soll der Rucksack für die aktuellen Herausforderungen oder den weiteren Lebensweg sein, um welches Wissen, welche Denkverfahren soll es dabei gehen? Oder: Wie werden Teile des alten Wissens und der alten Aufgaben so formuliert, dass sie aktuell sind, also als Herausforderung für anstehende Probleme gesehen werden? Wie frei ist der Kopf für Neues und wie viel Selbstvertrauen ist für Neues getankt?

An Aufgaben kann man Bekanntes nachvollziehen, also „altes“ Wissen zugänglich machen:

- welche Ausgangsprobleme zur Lösung angestanden sind,
- welche Lösungswege es schon gibt, welche davon wie aufwändig sind,
- was Voraussetzungen für bestimmte Lösungswege sind,
- wie Lernerfahrungen zu bestimmten Aufgaben verlaufen sind oder verlaufen sollen,
- warum sie – immer noch und immer wieder – wichtig sind.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

Welches Verhältnis zur Mathematik sollen Schüler/innen nach acht Schuljahren aufgebaut haben? *Verstehe und nutze ich einige mathematische Begriffe, wie Variable und Darstellungsweisen, wie Stabdiagramme, und kann ich dafür eine Tabellenkalkulation verwenden?* Erst an Aufgaben kann man solche Fragen so verdeutlichen, dass jeder weiß, was gemeint ist.

Wie kam der neue Aufgabenpool zustande?
Im Herbst 2004 wurde die Version 3.0 der „Bildungsstandards für Mathematik am Ende der 8. Schulstufe" fertig gestellt. Die Erprobung bzw. Pilotierung erfolgte in mehreren Phasen. Von den beiden Aufgabenerstellergruppen wurden A/B- bzw. C-Aufgaben ausgewählt und entlang bestimmter inhaltlicher Fragen an den Pilotschulen eingesetzt, aufgeschlüsselt in einer Befragungs- und Rückmeldesystematik von der Qualitätssicherungsgruppe.

Die Erprobung wurde von den Praktiker/innen an 100 Pilotschulen und assoziierten Pilotschulen – also rund 400 Klassen bzw. Leistungsgruppen – in ganz Österreich in Hinblick auf ihre Umsetzbarkeit und Brauchbarkeit durchgeführt. Bis Sommer 2005 wurden die Pilotschulen dreimal um Erprobung (die vierte ist derzeit, bis Ende Februar 2006, im Gang) von Aufgaben und eine Rückmeldung hierzu gebeten.

In einer Reflexionsphase im Sommer 2005 wurden die Erfahrungen aus der Pilotierung, die laufend von einer der beiden Aufgabenerstellergruppen A/B bzw. C roh ausgewertet wurden, zu einem Zwischenbericht (August 2005) verdichtet. Dieser Zwischenbericht enthält eine Zusammenfassung der Ergebnisse aus dem Schuljahr 2004/05 und einen Ausblick auf die kommende Arbeit, einerseits zur Neukonzeption des Aufgabenpools, andererseits zur Errichtung von Projektgruppen zur Vertiefung bestimmter im Zwischenbericht angesprochener Fragen.

Das Konzept für den Neuaufbau des Aufgabenpools sowie dessen Linie (Offenheit, Bezugsfähigkeit nach verschiedenen Richtungen und Bedürfnissen; siehe Einleitung) wurde von folgendem Team (Projektleitungsgruppe) gemeinsam mit den Auftraggebern aus dem BMBWK (Richard Stockhammer, Johannes Baumühlner) erarbeitet: Elfriede Alber, Christine Fischer, Heiner Juen, Beate Kröpfl, Sonja Machala, Angela Mortsch, Elisabeth Mürwald, Hans Christian Neureiter, Helma Ochnitzberger, Karl Josef Parisot, Christa Preis, Anna Schwendinger.

Der Neuaufbau des Aufgabenpools sollte unter
- Wahrung alter Bezüge (Kompetenzmodell)
- neue Bezüge ermöglichen (siehe Grafik Seite 15).

Die erste Publikation des neuen Aufgabenpools liegt nun vor. Sie entstand unter Leitung von Anna Schwendinger. Die Umsetzung der beschriebenen Linie erfolgte von den Aufgabenerstellergruppen A/B und C in Zusammenarbeit mit der Arbeitsgruppe „Qualitätssicherung" (siehe Anhang). Der Darstellung kam besondere Bedeutung zu, sie wurde von Anna Schwendinger und der Grafikerin Elvira Muxel erarbeitet. Die Comics wurden von Gerald Krammer, Schüler des Oberstufenrealgymnasiums Dreierschützengasse in Graz, erstellt.

Dank an alle Mitwirkenden

Allen bereits Genannten und auch den vielen, hier nicht ausdrücklich erwähnten Mitwirkenden danken wir ganz herzlich. Wir bitten Sie, auch weiterhin von den Möglichkeiten zur Mitgestaltung Gebrauch zu machen, damit die Standards breit getragen werden und so eine Konzentration auf gemeinsame Grundlagen ermöglichen.

Ausblick

Die zügige Erweiterung des Aufgabenpools ist eine Herausforderung im unmittelbaren Anschluss an diese Veröffentlichung. Das Konzept des offenen und vielseitig bezugsfähigen Pools verpflichtet uns, dass wir die Beziehungen zu verschiedenen Gruppen und Einzelpersonen auch wirklich pflegen. Dafür sind Prozesse und Veranstaltungen vorgesehen, die mit Hilfe geeigneter Medien, insbesondere der Plattform www.gemeinsamlernen.at, betrieben werden.

Richard Stockhammer; Johannes Baumühlner (Vertretung)
BMBWK, Projektauftraggeber für die Entwicklung der Bildungsstandards für Mathematik am Ende der 8. Schulstufe, insbesondere für den Aufgabenpool und die Pilotierung

WARUM DIESE BROSCHÜRE?

Mathematikbücher gibt es viele, Aufgabensammlungen ebenso. Aber was macht eigentlich eine „gute Aufgabe“ aus? Die Antworten werden so vielfältig sein wie die Menschen, die man fragt. Auch wir haben uns dieser Frage gestellt und bei ausgewählten Aufgaben näher hingesehen. Das Ergebnis ist diese kleine, ausführlich kommentierte Sammlung von 13 Aufgaben.

In erster Linie war es uns wichtig Aufgaben auszusuchen, von denen wir annehmen, dass die Schülerinnen und Schüler sie interessant finden. Darüber hinaus zeichnen sich die ausgewählten Aufgaben durch vielfältige Bezüge aus, denen unsere Aufmerksamkeit gilt. Sie können beispielsweise Anlass zum entdeckenden und problemlösenden Denken geben, sie können zur Nachhaltigkeit beitragen, Hilfe zur Diagnostik bieten, verschiedenste Lösungswege zulassen oder Zugang und Lösung auf verschiedenen Anspruchsniveaus ermöglichen.

Wir haben auch beispielhaft untersucht, welche Denkschritte notwendig sind, um die gestellte Aufgabe lösen zu können, welche mathematischen Kompetenzen durch die Lösung gezeigt werden. Oft werden soziale, überfachliche Fähigkeiten gefordert und geschult, die über die rein mathematischen hinausgehen.

Manche Aufgaben sind sehr kurz, andere benötigen zur Bearbeitung eine volle Unterrichtseinheit und mehr. Zeit, die besonders im Hinblick auf Nachhaltigkeit gut genützt ist, meinen wir. Die Kombination von Faktenwissen aus verschiedenen Stoffgebieten, Methodenkompetenz und Teamfähigkeit trägt wesentlich zur Sicherung des Unterrichtsertrags bei. Wer sich darauf einlässt, kann Mathematik als Fach erleben, das sich mit Problemlösen in vielfältiger Form beschäftigt.

So stellt sich letztlich die Frage, welche Kompetenzen zu dem beitragen, was man Lebenskompetenz nennt, und welchen Beitrag der Mathematikunterricht leistet. Die Auseinandersetzung mit einzelnen Aufgaben mag zeigen, dass dieser Beitrag weit größer ist als oft angenommen.

Anna Schwendinger

EINLEITUNG

Mit der Erstellung von Aufgaben zu den „Bildungsstandards für Mathematik am Ende der 8. Schulstufe“ wurde im Jahr 2004 begonnen. Die Zielsetzung war klar definiert: Es galt, Beispiele zu finden, die das Kompetenzmodell der österreichischen Bildungsstandards für Mathematik illustrieren. Insbesondere wurde versucht, die einzelnen Felder der Matrix (Handlungsdimensionen und inhaltliche Dimensionen) punktgenau durch Beispiele abzudecken und die entsprechenden „Ich kann“-Statements zuzuordnen.

In der weiteren Auseinandersetzung mit einzelnen Beispielen – beeinflusst durch die Rückmeldungen der Pilotlehrer/innen, die kommentierten Schülerbearbeitungen einzelner Beispiele und Literaturstudium (siehe Literaturliste Seite 92) – stellten wir fest, dass diese Zugangsweise und Kommentierung nicht ausreicht, um die Bedeutung von Aufgaben zu zeigen. Aufgaben müssen eine Vielzahl von Qualitätskriterien erfüllen, damit sie von den Schüler/innen auch als Herausforderung wahrgenommen werden.

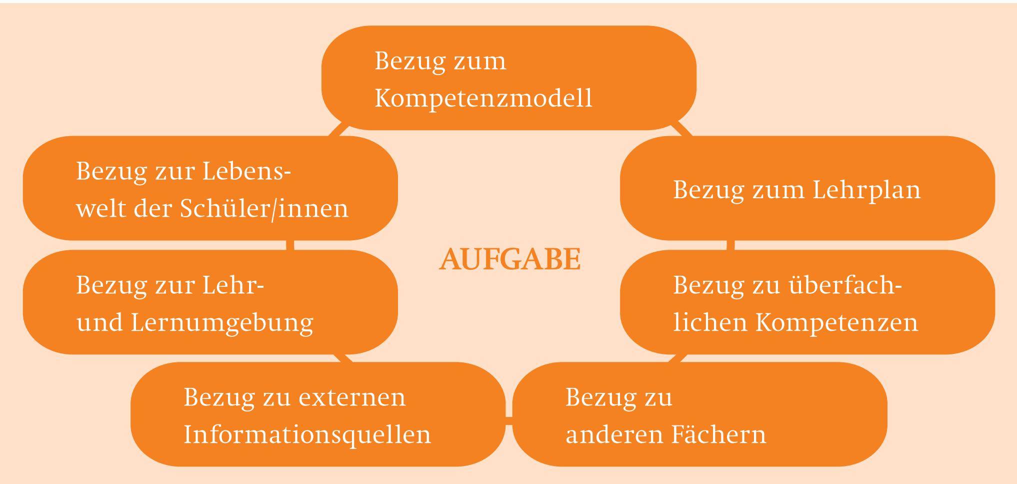
Aufgaben sollen ...

- lesbar für die Schüler/innen sein.
- für die Schüler/innen relevant sein, d. h., sie sollen ihre Lebenswelt und ihre Umwelt berücksichtigen (Rechenreise, Biskuitroulade).
- eigenständiges Denken fördern und das Einbringen eigener Erfahrungen zulassen (Cheopspyramide, Verkehrsstau).
- zeigen, dass vorhandene Lösungsstrategien zur Bearbeitung genutzt werden können bzw. die Entwicklung solcher Strategien fördern (Parkplatz).
- die Möglichkeit liefern, sich weitere Kenntnisse selbstständig oder mit entsprechender Anleitung anzueignen (Überwachungskamera, Morgendrink, Verkehrsstau).
- eine gewisse Offenheit besitzen – d. h. bewusst Unschärfen zulassen, die die Chance zu einer vertiefenden Betrachtung geben (Verkehrsstau, Biskuitroulade).
- zur Kommunikation anregen, d.h. durchaus auch irritierend sein (Ein toller Vorteilskoffer, Verkehrsstau).
- Varianten zulassen und so einerseits Individualisierung ermöglichen (Rechenreise, Biskuitroulade) bzw. in variierter Form Beispiele liefern für Diagnose, Therapie oder Testung (Parkplatz, Bauaufgabe Fußgängerzone).
- Spaß machen und zur Bearbeitung und zum Weiterdenken herausfordern (Prozentschnapsen, Rund um den Äquator).

In der Auseinandersetzung mit solchen Aufgaben wird es auch besser gelingen, erwünschte Kompetenzen nachhaltig zu erwerben und langfristig zu entwickeln. Gleichzeitig werden mit Aufgaben, die den Schüler/innen zur Bearbeitung gegeben werden, vielfältige Bezüge hergestellt und Fragen aufgeworfen. Diese Fragen gilt es bei der Erstellung von Aufgaben zu berücksichtigen.

- Welche Kompetenzen sollen mit dieser Aufgabe entwickelt werden? Welche Kompetenzen werden bei Bearbeitung dieser Aufgabe erkennbar?
- Welcher Lebensweltbezug wird mit dieser Aufgabe angestrebt?

- Welches Wissen und Können ist zur Bearbeitung der Aufgabe erforderlich bzw. wird bei Bearbeitung dieser Aufgabe erworben?
- Was ist die Bildungsaufgabe von Mathematik im Sinne von Allgemeinbildung?
- Welche Bedeutung hat die Aufgabe bezogen auf lebenslanges Lernen?
- Welche Beziehungen zu Inhalten, die in anderen Fächern vermittelt werden (worden sind), können von den Schüler/innen hergestellt werden?
- Welchen Beitrag liefert die Aufgabe für den Erwerb überfachlicher Kompetenzen?
- Welche Informationen können (werden) die Schüler/innen bei der Bearbeitung der Aufgabe beeinflussen?
- Welche Lern- und Lehrumgebungen sind der Bearbeitung dieser Aufgabe förderlich?
- Welche Unterrichtsformen sind der Bearbeitung dieser Aufgabe förderlich?



Bei den neuen Aufgaben wurde die Kommentierung erweitert. Damit soll das Bemühen um Einhaltung der Qualitätskriterien aufgezeigt bzw. auf einzelne der angeführten Bezüge hingewiesen werden. Je nach Beispiel erfolgt die Fokussierung auf unterschiedliche Fragen und Bezüge, auf die wir mit nebenstehendem Symbol aufmerksam machen wollen.

Alle Aufgaben sowie Kopiervorlagen für Ihren Unterricht finden Sie ab März 2006 auch auf www.gemeinsamlernen.at.

Wir laden Sie ein, die vorliegenden Aufgaben zu erproben und uns Ihre Erfahrungen mitzuteilen. Ihre Kommentare und Anregungen helfen uns nicht nur, die Qualität der vorliegenden Aufgaben zu verbessern, sie sind auch für die Erstellung neuer Aufgaben sehr wertvoll. (Rückmeldungen bitte an: standards_m8@cyberzauber.at)

Christa Preis, Elisabeth Mürwald
im Namen der Aufgabenersteller

EIN TOLLER VORTEILSKOFFER

In einem Geschäft wird die Sommerkollektion abverkauft. Stammkunden erhalten folgendes Flugblatt:

Anmerkung: Die Vorteilskoffer mit den Prozentangaben sind Pickerl und können vom Prospekt abgelöst werden.

Es gibt lange Hosen zu 49 €, kurze Hosen zu 39 €, Pullover zu 29 € und T-Shirts zu 19 €.

a) Wie viel Geld brauchst du, um je eine lange Hose, einen Pullover, eine kurze Hose und zwei T-Shirts zu kaufen, wenn du die Vorteilskofferpickerl verwendest?
b) Wie viel Euro ersparst du dir damit?
c) Du hast 90 € zur Verfügung. Was würdest du damit einkaufen?

Phase 1
Überlege zunächst allein eine Lösung für die Fragestellungen. Überlege dir auch eine Begründung für deine Entscheidung.

Phase 2
Bildet Dreiergruppen und vergleicht eure Ergebnisse aus a) und b). Einigt euch auf einen bestimmten Einkauf. Begründet die Entscheidung für diesen Weg. Überprüft die verschiedenen Berechnungen zur Fragestellung c).

Jeweils zwei Dreiergruppen bilden eine Sechsergruppe. Vergleicht noch einmal die Lösungswege zu a) und b). Schreibt unterschiedliche Einkaufsvorschläge zu Frage c) auf ein Plakat.

Was macht die Angabe im Prospekt mehrdeutig? Überlegt euch den Text für einen Prospekt, der eine eindeutige Aussage enthält. Welche Vorteile hat die Formulierung für Kunden?

Phase 3
Präsentiert euer Plakat und den neuen Prospekt und nehmt Stellung dazu. Erklärt eure Entscheidungen zu den Fragestellungen a) und b).

Mögliche Lösungswege

Zunächst sollen sich die Schüler/innen selbstständig mit der Aufgabe auseinander setzen, weil eine Gruppenarbeit nur mit einer Diskussionsgrundlage der Teilnehmer/innen sinnvoll wird.

MODELLBILDUNG
OPERIEREN
RECHNEN

Die Schüler/innen lesen den Text und müssen sich die Situation vorstellen. Sie überlegen sich, wofür sie die Prozentpickerl verwenden. Den Schüler/innen wird auffallen, dass fünf Kleidungsstücke eingekauft werden, aber nur vier Pickerl zur Verfügung stehen. Möglicherweise kommen sie auf die Idee, dass mehrere Prospekte zur Verfügung stehen. Oder sie überlegen, ob sie nicht auf ein Kleidungsstück mehrere Pickerl kleben könnten.

Mit ihren mathematischen Modellen gehen die Schüler/innen in die Gruppenarbeit. Die gleichen oder unterschiedlichen Modelle werden vorgestellt. Damit unterschiedliche Modelle auftreten können, wird in Frage a) bewusst nicht nach dem günstigsten Preis gefragt. Eventuell werden die Schüler/innen über verschiedene persönliche Annahmen diskutieren und die Frage aufwerfen, ob auf dem Prospekt Nebenbedingungen angeführt werden.

Das Ziel bei Aufgabe c) liegt darin, dass die Schüler/innen andere Lösungswege erkennen und nachrechnen. Sie übernehmen die Rolle der Lehrperson.

ARGUMENTIEREN
BEGRÜNDEN

Eine Präsentation verlangt, dass Schüler/innen mit Modellbildung und Begründung bewusster umgehen. Auf Lernprozesse lässt man sich intensiver ein, wenn Inhalte vorgestellt und Argumentationen verlangt werden.

PRÄSENTIEREN

Bei der Präsentation können unterschiedliche Meinungen berücksichtigt und begründet werden. Die Schüler/innen lernen, Argumentationen anderer anzuhören.

BEITRAG ZU LEBENSKOMPETENZEN

Diskussionen über die Verbindlichkeit von Prospekten und Kundenrechte können sich entwickeln. Das aufmerksame und kritische Lesen von Prospekten führt zu einem sicheren Umgang mit Werbematerial.

GRUPPENARBEIT

Die Fragestellung „Wie wurden in der Gruppe Entscheidungen getroffen?“ kann dazu genutzt werden, um effektive Gruppenarbeit zu reflektieren und weiterzuentwickeln.

Lösung für die günstigste Variante

a) Es werden die Pickerl -30 % für die lange Hose, -20 % für die kurze Hose und den Pullover, -10 % für das T-Shirt verwendet; das ergibt einen Preis von 124,80 €.

b) Es werden 30,20 € gespart.

c) Aus der Tabelle sind Zusammensetzungen zu wählen:
z. B.: 1 lange Hose, 1 kurze Hose und 1 Pullover (88,70 €)

	-30 %	-20 %	-10 %
49	34,3	39,2	44,1
39	27,3	31,2	35,1
29	20,3	23,2	26,1
19	13,3	15,2	17,1

Ein eindeutiger Text könnte folgendermaßen lauten:
„Lösen Sie die Rabattsticker vom Vorteilskoffer ab und kleben Sie jeweils ein Pickerl auf ein Kleidungsstück Ihrer Wahl." (Siehe auch abgeänderte Aufgabenstellung)

Methodische Hinweise

WACHSENDE GRUPPE

Diese Gruppenarbeit ist unter dem Namen wachsende Gruppe bekannt. Die Arbeit beginnt mit Einzelarbeit. Dann schließen sich drei Schüler/innen zu einer Kleingruppe zusammen und schließlich zwei Dreiergruppen zu jeweils einer Sechsergruppe. Diese Art der Gruppenarbeit ist dann sinnvoll einzusetzen, wenn es etwas zu klären oder erklären gibt oder wenn unterschiedliche Leistungsniveaus vorhanden sind. Gute Schüler/innen unterstützen die schwächeren. Durch das Erklären lernen auch die guten Schüler/innen sehr viel.

Aufgabe aus dem Leben

Bei dieser Aufgabe handelt es sich um ein reales Beispiel: Der Prospekt wurde von einem Modehaus in der Obersteiermark an Stammkunden versandt. Eine Erprobung der Aufgabe an den Pilotschulen zeigte, dass der Originaltext unterschiedlich interpretiert werden kann. Das „Ablösen der Vorteilskoffer" konnte zum Teil nicht interpretiert werden, daher wurde in der Überarbeitung eine entsprechende Anmerkung eingefügt.

Folgende Fragen sind bei der Erprobung aufgetreten:

- Kann man auf ein Kleidungsstück mehrere Pickerl kleben?
- Stehen einem Käufer/einer Käuferin mehrere Prospekte zur Verfügung?
- Warum wird bei a) nicht nach dem günstigsten Preis gefragt?

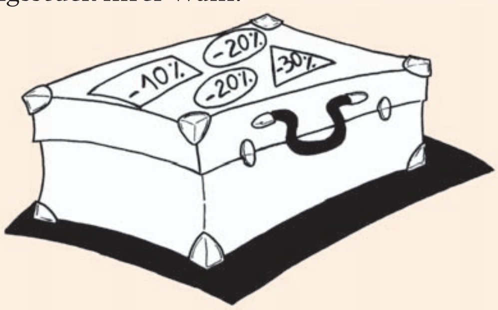
aus: Exemplarische, beziehungsreiche Aufgaben, Februar 2006

In den Rückmeldungen der Erprobungsphase wünschten sich Kolleg/innen eine Präzisierung der Aufgabenstellung. Unterschiedliche Vorschläge führten zu folgender Aufgabenstellung:

Ein toller Vorteilskoffer

In einem Geschäft wird die Sommerkollektion abverkauft. Stammkunden erhalten folgendes Flugblatt:

Lösen Sie die Rabattsticker vom Vorteilskoffer ab und kleben Sie jeweils ein Pickerl auf ein Kleidungsstück Ihrer Wahl.



Jede Kundin/Jeder Kunde darf nur ein Flugblatt verwenden.

Es gibt lange Hosen zu 49 €, kurze Hosen zu 39 €, Pullover zu 29 € und T-Shirts zu 19 €.

a) Wie viel Geld brauchst du, um je eine lange Hose, einen Pullover, eine kurze Hose und zwei T-Shirts zu kaufen, wenn du die Vorteilskofferpickerl verwendest?
b) Wie viel Euro ersparst du dir damit?
c) Du hast 90 € zur Verfügung. Was würdest du damit einkaufen?

Überlegungen zur veränderten Aufgabenstellung

Bei dieser neuen Aufgabe handelt es sich um ein konstruiert lebenspraktisches Beispiel, bei dem Prozentrechnungen aus dem Alltag in einen Text gekleidet wurden. Der Text ist so verfasst, dass den Schüler/innen praktisch keine Interpretationsmöglichkeiten offen bleiben. Sie können nur mehr die Pickerl auf verschiedene Kleidungsstücke kleben. Bei gleichem Textverständnis kommen alle Schüler/innen zu gleichen Lösungen. Diskussion über Werbung, die durch den Prospekt ermöglicht wird, entfällt. Der lebenspraktische Bezug geht verloren. Die mathematische Modellbildung wird den Schüler/innen nahe gelegt und braucht nicht selbstständig überlegt und begründet zu werden. Die Aufgabe wird so zu einem Rechenbeispiel, in dem Operieren im Vordergrund steht.

PARKPLATZ

Auf dem Parkplatz vor dem Kino stehen 12 Fahrzeuge – Motorräder und Autos. Julian zählt die Reifen der Fahrzeuge: es sind insgesamt 32 Reifen. Wie viele Autos und Motorräder stehen auf dem Parkplatz?

Kreuze die richtige Lösung an.
Auf dem Parkplatz stehen:

- ☐ 8 Autos und 4 Motorräder
- ☐ 4 Autos und 7 Motorräder
- ☐ 6 Autos und 4 Motorräder
- ☐ 5 Autos und 7 Motorräder
- ☐ 4 Autos und 8 Motorräder
- ☐ 3 Autos und 8 Motorräder

Mögliche Lösungswege

Um die Aufgabe mit einem der folgenden Lösungswege bearbeiten zu können, ist Voraussetzung, dass die Schüler/innen folgende überfachliche Kompetenz haben:

Ich treffe Entscheidungen auf der Basis von Fakten und Argumenten.

Nur dann werden sie tatsächlich einen geeigneten Lösungsweg suchen und nicht beliebig ankreuzen.

Ich kann mich für einen geeigneten Lösungsweg zur Bearbeitung eines Problems entscheiden und Lösungsabläufe planen.

Lösungsweg 1
Die Schüler/innen überprüfen sofort für jede Möglichkeit, ob die Anzahl der Fahrzeuge und die Gesamtzahl der Reifen richtig ist. Diese Strategie ist sehr aufwändig.

Ich kann Fehler erkennen.
Ich kann einfache Rechnungen im Kopf durchführen.
Ich kann mit ganzen Zahlen arbeiten.
Ich kann die Korrektheit mathematischer Darstellungen und Lösungswege einschätzen.

Lösungsweg 2
Die Schüler/innen überprüfen zuerst die Gesamtzahl der Reifen, scheiden die Möglichkeiten 1, 2, 4 und 6 aus, berechnen dann für die übrig gebliebenen Möglichkeiten die Gesamtzahl der Fahrzeuge und erkennen, dass Möglichkeit 5 richtig ist.

Lösungsweg 3

Die Schüler/innen scheiden zuerst jene Möglichkeiten aus, bei denen die Gesamtzahl der Fahrzeuge nicht 12 ist – nämlich Möglichkeit 2, 3 und 6. Anschließend berechnen sie für die übrig gebliebenen Möglichkeiten die Gesamtzahl der Reifen und erkennen, dass Möglichkeit 5 richtig ist.

Lösungsweg 4

Die Schüler/innen probieren mit Hilfe von Tabellen oder Zeichnungen, welche Möglichkeit richtig ist.

Anzahl der Autos	Anzahl der Motorräder	Gesamtzahl der Reifen
1	11	4 + 22 = 26
2	10	8 + 20 = 28
3	9	12 + 18 = 30
4	8	16 + 16 = 32

SUNIS & COSINA

Ich kann Lösungen auch durch systematisches Probieren wie auch mit Hilfe von Tabellen oder grafischen Darstellungen finden.

Lösungsweg 5

Die Schüler/innen beachten vorerst die zur Auswahl stehenden Lösungen nicht und lösen das Beispiel mit Hilfe einer Gleichung oder eines Gleichungssystems:

Anzahl der Autos x

Anzahl der Motorräder $12 - x$

Weil die Gesamtzahl der Reifen 32 ist, kann man folgende Gleichung ansetzen.

$4x + 2\,(12 - x) = 32$

Die Lösung $x = 4$ heißt, es sind 4 Autos und 8 Motorräder.

SUNIS & COSINA

Ich kann Gleichungen sinnvoll einsetzen und mit ihnen arbeiten.

Anschließend vergleichen sie ihre Lösung mit den angebotenen Möglichkeiten.

Lösungsweg 6

Die Schüler/innen beherrschen das Aufstellen und Lösen von Gleichungen mit zwei Variablen. Die Anzahl der Autos wird mit x bezeichnet, die der Motorräder mit y.

Für die Anzahl der Fahrzeuge gilt $x + y = 12$

Autos haben 4 Reifen, Motorräder 2 Reifen $4x + 2y = 32$

SUNIS & COSINA

Ich kann Systeme linearer Gleichungen sinnvoll einsetzen und mit ihnen arbeiten.

Die Lösung des Gleichungssystems ($x = 4$ für die Autos und $y = 8$ für die Motorräder) wird nun wieder mit den angebotenen Möglichkeiten verglichen.

Kommentierte Lösungswege von Schüler/innen (Auswahl)

Das Einfordern von Schülerkommentaren erhöht das Diagnosepotenzial einer Aufgabe.

Richtige Lösungen

„Ich habe jede Lösung durchgeprüft.“

☐ *8 Autos und 4 Motorräder*	*32 + 8 = 40*	*falsch*
☐ *4 Autos und 7 Motorräder*	*16 + 40 = 30*	*falsch*
☐ *6 Autos und 4 Motorräder*	*10 Fahrzeuge*	*falsch*
☐ *5 Autos und 7 Motorräder*	*usw.*	

„Zuerst habe ich geschaut, welche Antwort am nächsten ist, wenn man die Anzahl der Autos mal 4 rechnet. Das Beispiel mit 8 und 6 Autos war am nächsten. 8 war wegen der 4 Motorräder zu viel (32 + 8 ist nicht 32). 6 mal 4 + 2 mal 4 ist aber 32. Dann habe ich den Text genauer angeschaut und da 12 Fahrzeuge, 6 + 4 = 10, zu wenig, 4 + 8 ist aber 12. Also habe ich gerechnet 4 mal 4 + 8 mal 2 = 32. Richtig.“

DIE LÖSUNG ENTSTEHT DURCH KONTROLLE UND ERPROBEN AM TEXT

„Da am Parkplatz 12 Fahrzeuge stehen, fallen die Lösungen 2, 3 und 6 weg. Dann rechnet man die anderen Lösungen durch und kommt darauf, dass Lösung 5 richtig ist.“

„Ich habe einfach die Reifen aufgeteilt, bis es nicht mehr gegangen ist.“

Falsche Lösungen

„Es ist logisch, dass ein Auto 4 und ein Motorrad 2 Reifen hat. Dann habe ich einfach durchprobiert und gesehen, dass die Möglichkeiten 3 und 5 richtig sind.“

„Ich habe 32 Reifen durch 4 – wegen der Autos – dividiert. Als 8 herauskam, wusste ich, dass man durch 2 – wegen der Motorräder – dividieren kann, und da kam 4 heraus. So sind es 8 Autos und 4 Motorräder.“

Anmerkung

Mehrere Schüler/innen markierten mehr als eine, obwohl aus dem Aufgabentext hervorgeht, dass nur eine Lösung gesucht ist.

Dieses Beispiel wurde auch Schüler/innen der 6. Schulstufe vorgelegt; 10 von 22 Schüler/innen konnten es richtig lösen. Auffallend ist, dass bei falschen Lösungen in allen Altersstufen die gleichen Fehler gemacht wurden. Die meisten Fehler lagen bei Antwort 3, denn $6 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 32$, doch $6 + 4 = 10$ → „Es sind nur 10 Fahrzeuge und nicht die in der Angabe stehenden 12.“ → Diese Überlegung wurde von vielen Schüler/innen nicht mehr angestellt.

aus: Exemplarische, beziehungsreiche Aufgaben, Februar 2006

Multiple-Choice-Aufgaben

Bei der Betrachtung der kommentierten Lösungswege wird deutlich, welche Lösungsstrategien bei Multiple-Choice-Aufgaben möglich sind. Gerade der kritischen Überprüfung und der Kontrolle von vorgegebenen „Lösungen“ kommt hier besondere Bedeutung zu (heuristische Strategien) – Tätigkeiten, die von den Schüler/innen häufig nicht (im erforderlichen Ausmaß) wahrgenommen werden.

Beim Ausschließen einzelner Möglichkeiten bietet sich auch an, die Fähigkeit im Begründen und Argumentieren zu schulen. („Warum ist diese Möglichkeit falsch?“)

Die Schülerkommentare zeigen, dass gerade Multiple-Choice-Aufgaben individuelle Lösungswege (z. B. Probieren, Tabelle, Zeichnen, Gleichung) zulassen und somit für Schüler/innen aller Leistungsniveaus Erfolgserlebnisse ermöglichen.

Die Beschäftigung mit Multiple-Choice-Aufgaben ist auch insofern von Bedeutung, als viele Prüfungen (z. B. Führerschein) in dieser Form ablaufen. Gleichzeitig muss berücksichtigt werden, dass Aufgaben dieser Art nur bedingt als Diagnoseinstrument geeignet sind. Um eine Diagnose stellen zu können und in der Folge Interventionen stattfinden zu lassen, müssen die falsch angekreuzten „Schülerlösungen“ auf ihr Zustandekommen hinterfragt werden. Gleichzeitig ist bei der Auswahl der einzelnen Distraktoren (Antwortmöglichkeiten) darauf zu achten, dass diese typische Schülerfehler berücksichtigen.

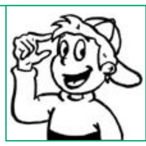
Hinweis

Multiple-Choice-Aufgaben bei der Standardtestung:
Bei jedem Multiple-Choice-Item wird im Aufgabentext auf die Anzahl der richtigen Antworten hingewiesen.

Möglichkeit 1
Eine richtige Antwort bei vorgegebenen sechs Möglichkeiten. Damit wird die Wahrscheinlichkeit, durch zufälliges Ankreuzen die richtige Antwort auszuwählen, auf ein Sechstel reduziert.

Möglichkeit 2
Zwei richtige Antworten bei vorgegebenen fünf Möglichkeiten, wobei beide richtigen Antworten erkannt werden müssen. Damit wird die Wahrscheinlichkeit, durch zufälliges Ankreuzen die Aufgabe richtig zu lösen, auf ein Zehntel reduziert.

1. Etappe

Partnerarbeit
Angenommen der Treibstoffverbrauch eines Autos beträgt im Durchschnitt 7 Liter pro 100 km. Der Tank fasst 65 Liter.

Wie viel Treibstoff befindet sich nach einer Fahrt von Zell am See nach Innsbruck im Tank, wenn der Tank beim Start voll war?

Sucht einen Weg von Zell am See nach Innsbruck mit Hilfe eines Routenplaners aus dem Internet oder einer Straßenkarte (oder Angabe der Strecke durch die Lehrperson).

2. Etappe

Familie Reiselustig fährt von Zell am See nach Innsbruck. Auf der Strecke von Zell am See nach Wörgl wird die Bundesstraße und von Wörgl nach Innsbruck die Autobahn benutzt. Der Dieselverbrauch für das Auto beträgt 7,5 l/100 km auf der Bundesstraße und 6,5 l/100 km auf der Autobahn. Der erhöhte Verbrauch auf der Bundesstraße ergibt sich durch unregelmäßiges Fahren bedingt durch Ampeln, Behinderungen. Der Preis für einen Liter Diesel beträgt p €. Setze für p den aktuellen Treibstoffpreis ein.

Frage A: Wie hoch ist der Treibstoffverbrauch auf der Bundesstraße, wie hoch auf der Autobahn?

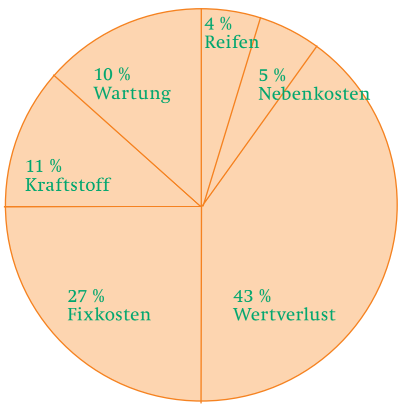
Frage B: Wie hoch sind die Kosten für den Dieseltreibstoff für die gesamte Fahrt von Zell am See nach Innsbruck?

Frage C: Wie hoch sind die durchschnittlichen Treibstoffkosten für die gesamte Fahrt pro km? Welche anderen Kosten müssen noch berücksichtigt werden, wenn die Durchschnittskosten für ein Auto pro Kilometer angegeben werden?

Partnerarbeit
Mit welchen Gesamtkosten muss man laut Grafik rechnen?

Führt eine Schätzung durch. Besorgt euch die notwendigen Informationen aus dem Internet, aus dem Atlas oder von eurer Lehrerin/eurem Lehrer.

Beantwortet die Fragen! Vergleicht die Ergebnisse mit zwei Zweiergruppen!



aus: Exemplarische, beziehungsreiche Aufgaben, Februar 2006

3. Etappe

Ein Auto verbraucht auf jedem Autobahnkilometer a Liter, ansonsten pro km b Liter Diesel.
Ein Liter Diesel kostet p €.
Auf einer Fahrt werden x km auf der Autobahn und y km auf sonstigen Straßen (innerstädtisch, Bergstraßen etc.) zurückgelegt.

1. $a \cdot x$
2. $p \cdot b \cdot y$
3. $a \cdot x + b \cdot y$
4. $p \cdot (a \cdot x + b \cdot y)$
5. $(a \cdot x + b \cdot y) : (x + y)$
6. $p \cdot (a \cdot x + b \cdot y) : (x + y)$

Partnerarbeit

Welche Informationen muss sich Sunis besorgen? (Verwendet einen Routenplaner oder eine Straßenkarte.)

Welche Terme benutzt Sunis zur Lösung der Hausübung?

Ordnet die Terme den Fragen zu. Was beschreiben die nicht verwendeten Terme?

Bereitet eine Präsentation eurer Ergebnisse in Form eines Gespräches vor. Sunis unterhält sich mit einer Mitschülerin bzw. einem Mitschüler über seine Lösung der Hausübung.

Mögliche Lösungswege

Taschenrechner dürfen verwendet werden. Zunächst wird den Schüler/innen ein Routenplaner vorgestellt. (Wie komme ich zum Routenplaner? Wie bediene ich ihn? Welche Informationen kann ich abfragen?)
Routenplaner im Internet: z. B. www.tiscover.at

1. Etappe

Die Schüler/innen müssen die Bedeutung von „7 l pro 100 km“ erkennen. Manche werden den Verbrauch für einen Kilometer berechnen, einige werden erkennen, dass 140 auch als 1,4 · 100 gelesen werden kann.

ZAHLENVERSTÄNDNIS, RECHNEN

Schnellste Route von Zell am See nach Innsbruck: 140 km (laut Routenplaner Europa, CD-ROM) in 2 h. Der Verbrauch beträgt rund 10 Liter. Rechnung: 7 · 1,4 = 9,8
Es sind noch rund 55 Liter im Tank.

2. Etappe

Bei der Internetrecherche (Routenplaner) muss berücksichtigt werden, dass zwei unterschiedliche Strecken (Zell am See – Wörgl, Wörgl – Innsbruck) angegeben sind.

INFORMATIONEN AUS DEM INTERNET

Bei der Berechnung kann Zeit gespart werden, wenn die Arbeit aufgeteilt wird.

Es müssen Überlegungen zu den Autokosten angestellt werden. Aus der Grafik kann abgelesen werden, dass die Gesamtkosten rund dem Neunfachen der Treibstoffkosten entsprechen. Diese Abschätzung kann auf zwei Arten erfolgen: 11 % sind rund 10 %, also sind die Gesamtkosten zirka das Zehnfache. 11 % sind rund ein Neuntel von 100 %, also sind die Gesamtkosten zirka das Neunfache.

ABSCHÄTZEN

Der Benzinverbrauch sollte kritisch betrachtet werden, weil er sehr vom Fahrstil (Beschleunigen, Bremsen) und der Durchschnittsgeschwindigkeit abhängt.

Dieselverbrauch: 7,5 l pro 100 km auf der Bundesstraße (78 km); 6,5 l pro 100 km auf der Autobahn (62 km). Preis pro Liter Diesel: 0,995 €

Frage A: Verbrauch auf der Autobahn 4,03 Liter, auf der Bundesstraße 5,85 Liter, Dieselverbrauch insgesamt: 9,88 Liter
Frage B: Kosten: 9,83 €
(7,5 · 0,78 + 6,5 · 0,62) · 0,995 = 9,83
Frage C: Kosten pro Kilometer: 0,07 € (9,83 : 140)
Gesamtkosten daher: 0,63 € (das Neunfache der Kraftstoffkosten)

3. Etappe

In der 1. Etappe der Aufgabenstellung kommen „Liter pro 100 km“ vor, bei den Termen „Liter pro km“. Beim Einsetzen ist dies zu berücksichtigen. Übersehen Schüler/innen diese Information, müssen sie spätestens bei der Interpretation des Ergebnisses den Fehler bemerken. Damit die Präsentation nicht langweilig wird, kann man durch Los einige Gruppen bestimmen, die ihre Arbeit präsentieren.

TEXTVERSTÄNDNIS, SINNHAFTIGKEIT VON ERGEBNISSEN

aus: Exemplarische, beziehungsreiche Aufgaben, Februar 2006

MATHEMATISCHE DARSTELLUNGEN INTERPRETIEREN

Das Gespräch als Präsentationsform wird gewählt, damit die Schüler/innen Terme in der Alltagssprache formulieren müssen. Es geht um die Kombination der Sprache der Mathematik und der Alltagssprache. Im Gespräch könnten die Terme folgendermaßen beschrieben werden. Dieselpreis 0,995 €/l (*Stand Jänner 2006*)

1. Treibstoffverbrauch auf der Autobahn (4,03 Liter)
2. Treibstoffkosten für die Fahrt auf sonstigen Straßen (5,85 €)
3. Treibstoffverbrauch auf der Fahrt (9,88 Liter)
4. Treibstoffkosten für die Fahrt (9,83 €)
5. Durchschnittlicher Treibstoffverbrauch pro km (0,071 Liter)
6. Durchschnittliche Treibstoffkosten pro km (0,07 €)

Überlegungen zur Aufgabenstellung

Differenzierung

Die 1. Etappe eignet sich für alle Leistungsgruppen, der Schwierigkeitsgrad und die Komplexität steigen in der 2. und 3. Etappe.

Es kann den Schüler/innen freigestellt werden, ob sie nach der 1. auch die 2. bzw. 3. Etappe lösen. Möglicherweise möchten einige Schüler/innen mit der 3. Etappe beginnen oder nur die 3. Etappe lösen.

FUNKTIONALE ABHÄNGIGKEITEN IM ALLTAG

Durch den Aufbau des Beispiels (2. und 3. Etappe) sollen die Schüler/innen auf die Notwendigkeit und den Vorteil von Termen hingeführt werden. Diese Denkstruktur ist für Tabellenkalkulationen erforderlich. Der Einsatz einer Tabellenkalkulation könnte eine Weiterführung des Beispiels sein. In vielen Bereichen des täglichen Lebens laufen im Hintergrund Berechnungen mit Termen ab (z. B. Kauf von Fahrkarten bei einem Automaten).

Die „Rechenreise" ist ein Beispiel aus der Lebenswelt. Die Orte können den regionalen Gegebenheiten angepasst werden.

Weiterführende fächerübergreifende Fragestellungen:

- Diskussion des Begriffs Kilometergeld
- „Kostenwahrheit auf der Straße"
- Routenplaner

Aus dem Lehrplan

Sprache und Kommunikation
Beschreiben von Objekten und Prozessen; Präzision der Sprachverwendung; Gebrauch und Bedeutung von Definitionen, Vorgänge des Klassifizierens; Umsetzen von Texten in mathematische Handlungen; Konzentrieren von Sachverhalten in mathematische Formeln; Auflösen von Formeln in sprachliche Formulierungen; Vermitteln und Verwenden einer Fachsprache mit spezifischen grammatikalischen Strukturen.

VERKEHRSSTAU

Die Lehrerin möchte pünktlich in der Schule sein. Sie notiert sich 10 Tage lang die genaue Fahrzeit für ihren Weg zur Schule. Am neunten Tag gab es wegen Bauarbeiten auf der Straße einen Stau.

Tag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Zeit in Minuten	25	26	20	23	21	22	20	22	105	20

a) Berechne die mittlere Fahrzeit aller Fahrten.
b) Berechne die mittlere Fahrzeit ohne Tag 9.
c) Gib jenen Wert an, der typisch für die Dauer ihrer Fahrzeit ist. Ermittle dazu den Median ihrer Fahrzeiten mit und ohne Tag 9.
d) Welche Fahrzeit soll sie für ihre künftigen Fahrten einplanen, um in der Regel pünktlich in der Schule zu sein? Begründe deine Antwort.

Mögliche Lösungswege

Die Schüler/innen ermitteln bei der Bearbeitung dieses Beispiels zwei verschiedene statistische Kenngrößen – das arithmetische Mittel und den Median. Somit bietet sich das Beispiel an, den Unterschied zwischen diesen beiden statistischen Kenngrößen im Schülergespräch herauszuarbeiten, sofern der Begriff des Medians bereits im Unterricht behandelt wurde. Das Beispiel kann auch als Anlass genommen werden, um den Begriff des Medians als weitere statistische Kenngröße einzuführen.

Frage a)
Berechnung des arithmetischen Mittels
(Summe aller Fahrzeiten) : (Anzahl der Fahrten)
304 : 10 = 30,4
Die mittlere Fahrzeit beträgt 30,4 Minuten (oder: 30 Minuten 24 Sekunden) bzw. rund 30 Minuten.

Frage b)
Berechnung des arithmetischen Mittels
(Summe aller Fahrzeiten) : (Anzahl der Fahrten)
199 : 9 = 22,11
Die mittlere Fahrzeit beträgt 22,11 Minuten (oder: 22 Minuten 6,7 Sekunden) bzw. rund 22 Minuten.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

Frage c)
Ermittlung des Medians (mittlerer Wert einer geordneten Liste)

Mit Berücksichtigung von Tag 9:
20 20 20 21 22 22 23 25 26 105
Der Median beträgt 22 Minuten.

Ohne Berücksichtigung von Tag 9:
20 20 20 21 22 22 23 25 26
Der Median beträgt ebenfalls 22 Minuten.

SUNIS & COSINA

Ich kann Berechnungen mit konkreten Zahlen durchführen.
Ich kann statistische Kennzahlen ermitteln.

Frage d)
Falls die Lehrerin auf Pünktlichkeit Wert legt, ist keiner der berechneten Werte ein wirklich geeignetes Maß. Der Stau wegen der Bauarbeiten ist nur die Ausnahme und sollte nicht in die Überlegungen einfließen. Lässt man also den 9. Tag weg, so bleibt das Maximum von 26 Minuten das am besten geeignete statistische Maß. Wenn sie 30 Minuten vor Unterrichtsbeginn startet, kann sie ihren Arbeitstag in der Regel ohne Hektik beginnen.

SUNIS & COSINA

Ich kann Annahmen und Voraussetzungen, die meiner Argumentation zugrunde liegen, benennen, erklären und begründen.
Ich unterscheide zwischen verstandesmäßigen und gefühlsmäßigen Begründungen.

Begründungen der Schüler/innen zu d)

Bei den Antworten der Schüler/innen fällt auf, dass subjektive Erfahrungen in der Begründung eine große Rolle spielen. Das Maximum von 26 Minuten wird nicht dezidiert angesprochen.

„Die mittlere Fahrzeit, die sie einplant, müsste 22 min sein. Begründung: An normalen Tagen ist keine Baustelle."

„Da sie bei einer Berechnung von 22 min Fahrzeit in 40 % der Fahrten zu spät in die Schule kommt, wären 26 min gut."
„Wegen Staus, Baustellen und im Winter (z. B. Schneefall) sollte sie ungefähr eine halbe Stunde für ihren Weg einplanen."

„Sie sollte 30 Minuten einplanen, denn wenn kein Stau ist, kommt sie auf jeden Fall früh genug und hat auch noch ein paar Minuten zum Entspannen."

„Ich habe überlegt: Wenn sie 22,1 Minuten einplant, kann sie sich keine Pausen bzw. Staus einplanen. Deswegen nahm ich die längere Zeit von 30,4 min (ca. 30 min). So kann sie sich zwar

auch keinen 105-Minuten-Stau gönnen, sie muss aber auch nicht schnell sein oder nervös, um nicht zu spät zu kommen.“

Ich unterscheide zwischen verstandesmäßigen und gefühlsmäßigen Begründungen.

Umgang mit statistischen Kenngrößen

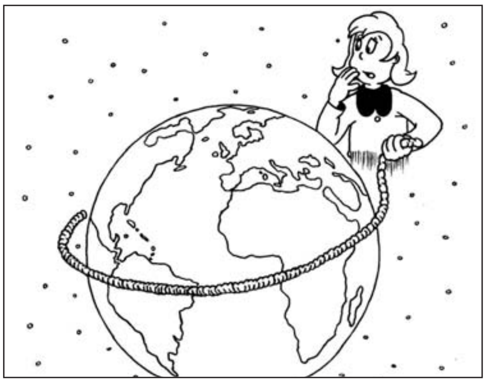
Das Beispiel hat Alltagsbezug – nahezu jede/r Schüler/in kennt aus eigenem Erleben unterschiedliche Fahrzeiten für dieselbe Weglänge und daraus resultierendes Zuspätkommen.

Gleichzeitig bietet die Aufgabe die Möglichkeit, die Kenntnisse über statistische Kenngrößen zu erweitern, ihren Informationsgehalt zu vergleichen bzw. auch zu diskutieren, wann man welcher Kenngröße den Vorrang geben wird, um Entscheidungen zu begründen. Die unterschiedlichen Werte bei der Beantwortung der Fragen a), b) bzw. c) können als Hinweis darauf dienen, dass statistische Angaben und Aussagen kritisch zu hinterfragen sind.

Gerade im Umgang mit statistischen Kenngrößen zeigt sich, inwieweit zwischen verstandesmäßigen und gefühlsmäßigen Begründungen unterschieden wird.

RUND UM DEN ÄQUATOR

Stell dir den Äquator idealisiert als Kreis (r = 6 370 km) vor. Um den Äquator wird ein Seil gespannt. Dieses Seil wird um einen Meter verlängert und dann kreisförmig mit einem Abstand zum Äquator um die Erde herum gelegt. Ist der Abstand so groß, dass eine Maus darunter kriechen kann? Worauf würdest du wetten: Kommt die Maus durch oder kommt sie nicht durch?



Folgende Schritte führen dich zur Lösung des Problems:

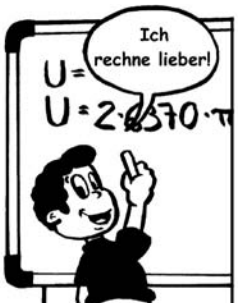
Schritt 1: Arbeit in Vierergruppen
Tragt eure Meinungen in das Arbeitsblatt ein (Beilage).

Führt nun mehrere Versuche durch:
Messt mit einer Schnur den Umfang eines Gegenstandes mit kreisförmigem Querschnitt (z. B. Umfang einer Flasche, Papierkorb, Globus, Kugelschreiber, ...).
Verlängert jeweils den Umfang um einen Meter und legt die Schnur in gleichmäßigem Abstand um diesen Gegenstand herum.

Beantwortet folgende Fragen auf dem Beilagenblatt:

- Worauf würde jede Person in der Gruppe jetzt wetten? Tragt die Meinungen ein.
- Wie viele haben ihre Meinung geändert?
- Zu welcher Vermutung kommt ihr nach der Durchführung mehrerer Versuche?

Schritt 2: Partnerarbeit (Teilung der Vierergruppe)
Versucht jetzt das Problem rechnerisch zu lösen.



Berechnet ausgehend vom Erdradius den Umfang des Äquators und dann den Radius des Kreises, der mit dem um 1 m verlängerten Umfang gelegt werden kann. Rechnet dabei auf mm genau.

Falls ihr es nicht allein schafft, beratet euch in der Vierergruppe. Wenn euch die Zahlen für die Erde zu groß sind, nehmt einen anderen Radius. Denkt an die Versuche!

Schritt 3: Partnerarbeit
Cosina hat folgende Berechnungen angestellt, aber leider auf einige Kommentare vergessen. Was meint Cosina mit diesen Rechnungen?

Erklärt die Berechnung und erläutert das Ergebnis (Rechnung in Meter):
Alter Kreis: $u = 2\,r\,\pi$
Neuer Kreis: $u + 1 = 2\,r\,\pi + 1$
Neuer Radius:
$(u + 1) : (2\,\pi) = (2\,r\,\pi + 1) : (2\,\pi) = r + \frac{1}{2\,\pi} \approx r + 0{,}16$

Anmerkung: Das Arbeitsblatt befindet sich als Kopiervorlage im Anhang.

Möglicher Lösungsweg

Pro Gruppe wird eine Schnur mit zirka 3 m Länge benötigt.

Wenn einigermaßen präzise gearbeitet wird, erkennen die Schüler/innen sehr schnell, dass der Abstand des neuen Kreises vom alten Kreis immer gleich groß ist, egal wie groß der ursprüngliche Kreis ist.

ZUSAMMENHÄNGE ERKENNEN UND BEGRÜNDEN

Umfang Äquator: $u \approx 40\,023\,890{,}406$ m
neuer Radius: $40\,023\,891{,}406 : (2\,\pi) \approx 6\,370\,000{,}159$ m
Nicht alle Taschenrechner zeigen ausreichend viele Stellen an. Beachten Sie die notwendige Genauigkeit auf mm.

Interessant ist es, wenn die einzelnen Gruppen mit unterschiedlichen Kreisradien rechnen.

Beweis und Kommentare könnten folgendermaßen aussehen:
Ein Kreis mit dem Radius r (in m) hat den Umfang $u = 2\,r\,\pi$.
Der Umfang wird um einen Meter verlängert, also $u + 1$.
Setzt man für den Umfang $2\,r\,\pi$ ein, kann der Umfang des neuen Kreises angeschrieben werden durch $u_{neu} = 2\,r\,\pi + 1$.
Der neue Umfang dividiert durch $2\,\pi$ ergibt den neuen Radius:
$r_{neu} = (2\,r\,\pi + 1) : (2\,\pi)$ = (Anwendung des Distributivgesetzes)
$= r + \frac{1}{2\,\pi} \approx r + 0{,}16$ (in m)

ANNAHMEN UND VORAUSSETZUNGEN BEGRÜNDEN UND BEWEISEN

Der neue Radius unterscheidet sich also vom alten Radius um zirka 16 cm unabhängig vom alten Radius.

Überlegungen zur Aufgabenstellung

Naturwissenschaftliche Arbeitsweise

Das Beispiel soll einen Beitrag zur naturwissenschaftlichen Arbeitsweise leisten: ausgehend von einer Fragestellung werden Vermutungen angestellt. Die darauf folgenden Experimente bestärken oder widerlegen die Vermutungen, Hypothesen werden formuliert, Berechnungen angestellt. Daraus ergibt sich die Frage, ob ein allgemeiner Beweis möglich ist. Die einzelnen Berechnungen in der Aufgabenstellung bringen die Schüler/innen auf die Spur des allgemeinen Beweises. Die Schüler/innen arbeiten sehr handlungsorientiert und erleben Mathematik dadurch mit vielen Sinnen.

KOOPERATIVES HANDELN

Schritt 1: Experimenteller Zugang
In der Gruppenarbeit geht es um das Vertreten von Meinungen und um den Umgang mit Meinungsverschiedenheiten. Treten Schwierigkeiten in der Gruppe auf, müssen diese angesprochen werden. Wichtig ist, dass die Gruppe eine gemeinsame Entscheidung trifft und eine Vermutung formuliert.

OPERIEREN

Schritt 2: Rechnerischer Zugang – Bestätigung der Vermutung an einem Beispiel
In einer Partnerarbeit wird ein Beispiel herausgegriffen. Es können kleine oder große Zahlen (Erdradius) verwendet werden. Kleinere Ausgangszahlen ermöglichen ein Berechnen mit dem Taschenrechner. Haben zwei Zweiergruppen, die eine Vierergruppe bilden, unterschiedliche Zahlen gewählt, liegt jetzt schon eine Verallgemeinerung nahe. Drei Zweiergruppen mit unterschiedlichen Ausgangszahlen zeigen diese Tendenz noch deutlicher (von außen gesteuerte Gruppenbildung).

ARGUMENTIEREN UND BEGRÜNDEN

Schritt 3: Verallgemeinerung – Beweis der Vermutung
Für leistungsstarke Schüler/innen wird es nun kein Problem mehr sein, zu einer Verallgemeinerung zu kommen und die Vermutung zu beweisen. Die teilweise Ergänzung mit Kommentaren bahnt das Argumentieren und Begründen an.

KRITISCHES DENKEN: UNTERSCHEIDUNG VON MEINUNGEN, FAKTEN UND ARGUMENTEN

Das beiliegende Arbeitsblatt ist für Schüler/innen ein begleitendes Protokoll, für Lehrer/innen ein Instrument der Rückmeldung (was Schüler/innen gelernt haben) bzw. der Bewertung. Das Formular soll den Unterschied zwischen Meinungen und Fakten zeigen. Am Anfang haben die Schüler/innen Vermutungen (Meinungen), zum Schluss Fakten.

Je nach Leistungsgruppe werden nicht alle Schritte möglich sein.

CHEOPSPYRAMIDE

Variante A

Arbeitet in Gruppen zu drei bis vier Personen.

Überlegt euch konkrete mathematische Fragestellungen.
Sucht Antworten auf die Frage von Sunis.
Was ist vergleichbar?
Entscheidet euch für einen oder zwei Vergleiche.
Sucht Möglichkeiten für die Berechnungen.

Holt euch die notwendigen Informationen zur Cheopspyramide und zu einem Fußballfeld aus dem Internet.
Führt entsprechende Berechnungen durch.
Worin unterscheiden sich eure Berechnungen von der Wirklichkeit?

Legt für die Gruppe einen Arbeitsplan und eine Aufgabenverteilung fest.
Wer ist wofür zuständig?
Wie viel Zeit ist für die einzelnen Teilaufgaben vorgesehen – wer achtet auf die Zeit?

Bereitet eine Präsentation eurer Ergebnisse vor.
In welcher Form findet die Präsentation statt und wer übernimmt die einzelnen Teile?

Folgende Punkte sind zu berücksichtigen:
Zu welchen Größenverhältnissen seid ihr gekommen?
Wodurch unterscheiden sich die Berechnungen von der Wirklichkeit?

Arbeitszeit: 1 Unterrichtsstunde (inkl. Vorbereitung der Präsentation der Ergebnisse)

Hinweis: Bei dieser Aufgabe werden von euch mathematische und überfachliche Kompetenzen gefordert. Zur Orientierung könnt ihr einen Kompetenzanzeiger benutzen. Je mehr Punkte ihr erreicht, desto besser erfüllt ihr die gestellte Aufgabe.

Variante B

Arbeitet in Gruppen zu drei bis vier Personen.

Überlegt euch konkrete mathematische Fragestellungen.
Sucht Antworten auf die Frage von Sunis.
Entscheidet euch für einen oder zwei Vergleiche.
Führt entsprechende Berechnungen durch.

Legt für die Gruppe einen Arbeitsplan und eine Aufgabenverteilung fest.

Bereitet eine Präsentation eurer Ergebnisse vor.

Arbeitszeit: 1 Unterrichtsstunde (inkl. Vorbereitung der Präsentation der Ergebnisse)

Hinweis:
Bei dieser Aufgabe werden von euch mathematische und überfachliche Kompetenzen gefordert. Damit ihr euch orientieren könnt, was verlangt wird, könnt ihr einen Kompetenzanzeiger benutzen. Je mehr Punkte ihr erreicht, desto besser erfüllt ihr die gestellte Aufgabe.

Variante C

Arbeitet in Gruppen zu drei bis vier Personen.

Überlegt euch konkrete mathematische Fragestellungen zum Comic und präsentiert eure Überlegungen und Ergebnisse der Klasse.

Arbeitszeit: 1 Unterrichtsstunde (inkl. Vorbereitung der Präsentation der Ergebnisse)

Hinweis:
Bei dieser Aufgabe werden von euch mathematische und überfachliche Kompetenzen gefordert. Damit ihr euch orientieren könnt, was verlangt wird, könnt ihr einen Kompetenzanzeiger benutzen. Je mehr Punkte ihr erreicht, desto besser erfüllt ihr die gestellte Aufgabe.

Anmerkung: Der Kompetenzanzeiger befindet sich als Kopiervorlage im Anhang.

Exemplarische Lösungen

Informationen aus dem Internet (z. B.: www.wikipedia.de, Suchbegriff: Cheopspyramide) oder aus dem Lexikon

Je nach Quelle gibt es unterschiedliche Größenangaben, ein mögliches Suchergebnis könnte so lauten:

Die Cheopspyramide in Zahlen (Internet):
Basislänge 230,38 Meter, Höhe 146,60 Meter, zwei Millionen Kalksteinblöcke à 2,5 Tonnen wurden in 20 - 30 Jahren von 100 000 Arbeitern verbaut.

Fußballfeld (internationale Spiele):
Länge: 100 bis 110 Meter
Breite: 64 bis 75 Meter

Vergleichsmöglichkeiten:
- Grundfläche der Pyramide mit dem Fußballfeld
- Eine Seitenfläche mit dem Fußballfeld
- Mantel mit dem Fußballfeld
- Oberfläche mit dem Fußballfeld
- Längenvergleiche (z. B. Basislänge mit Länge des Fußballfeldes)

Berechnungen (Angaben auf Meter gerundet):
Fußballfeld: maximal: $A_{max} = 8\,250\ m^2$, minimal: $A_{min} = 6\,400\ m^2$
Pyramide: Höhe der Seitenfläche: 187 m (Berechnung unter Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes)

Mantel: $86\,000\ m^2$
Verhältnis: $M_p : A_{max} \approx 10 : 1$; $M_p : A_{min} \approx 13 : 1$

Dreiecksfläche: $21\,500\ m^2$
Verhältnis: Dreiecksfläche : $A_{max} \approx 2{,}6 : 1$; Dreiecksfläche : $A_{min} \approx 3{,}4 : 1$

Grundfläche: $52\,900\ m^2$
Verhältnis: Grundfläche Pyramide : $A_{max} \approx 6{,}4 : 1$; Grundfläche : $A_{min} \approx 8{,}3 : 1$

Oberfläche: $138\,900\ m^2$
Verhältnis: Oberfläche : $A_{max} \approx 17 : 1$; Oberfläche : $A_{min} \approx 22 : 1$

Präsentationsmöglichkeiten und Produkte:
- Weiterführung des Gesprächs
- Folie
- Plakat
- PowerPoint
- Interview
- Zeitungsartikel

Überlegungen zur Aufgabenstellung

Vorgabe der Arbeitszeit

Die Zeitvorgabe ist ein Bestandteil der Aufgabe; die Schüler/innen haben sich daran zu halten und sich die Zeit dementsprechend einzuteilen. Der Zeitaufwand für die Internetsuche, die Suche nach Vergleichsmöglichkeiten, die Zeit für die Berechnungen und die Vorbereitung der Präsentation sind von den Schüler/innen einzuplanen; nur eine effiziente arbeitsteilige Teamarbeit führt zu einem befriedigenden Ergebnis. Für die Durchführung der gesamten Unterrichtssequenz sind zwei Unterrichtsstunden vorzusehen. Will man nicht alle Gruppen präsentieren lassen, können einige Gruppen für die Präsentation ausgelost werden.

Warum drei Varianten?

Die Varianten zeigen den Übergang von eher geschlossenen zu offenen Aufgabenstellungen. Mit offenen Aufgabenstellungen wird dem entdeckenden Lernen besser entsprochen. Gerade die offene Aufgabenstellung eignet sich für eine 3. Leistungsgruppe. Zusammen mit den Schüler/innen können die mathematischen Aufgaben formuliert werden.

Variante A: Zwischenschritte für die Arbeitsaufträge werden formuliert.

Variante B: Das Bild mit Arbeitsauftrag wird angeboten (für in dieser Methode bereits geübte Schüler/innen).

Variante C: Das Bild wird mit offener Aufgabenstellung angeboten (für Schüler/innen, die gewohnt sind, mit offenen Arbeitsaufträgen zu arbeiten).

Offene Aufgabenstellung und handlungsorientierter Zugang zur Mathematik

Lernen kann nur von Lernenden selbst vollzogen werden. Unterricht kann nur Angebote an die Lernenden machen. Da sich Unterricht an vorgegebenen Zielen orientiert, kann der Widerspruch, der sich daraus ergibt, nur überwunden werden, wenn Lernende die Möglichkeit erhalten, die Wege, welche zu den Zielen führen, selbst zu bestimmen.

Über die offene Aufgabenstellung können (v. a. leistungsschwächere) Schüler/innen die für sie geeignete Zugangsform zur Bewältigung des Problems selbst wählen. Manche Schüler/innen brauchen den handlungsorientierten Zugang. Sie erfassen den Sachverhalt, wenn sie handelnd damit umgehen können. Sie verinnerlichen die Handlungen und bauen Operationen auf. Es können Zeichnungen angefertigt, Modelle verwendet oder selbst hergestellt werden oder es kann nach ähnlichen Vergleichen (etwa im Schulhof) gesucht werden.

Manche Schüler/innen erfassen Sachverhalte durch Bilder oder Grafiken. Auch dazugehörige Geschichten sind hilfreich. Bilder oder Geschichten zur Pyramide und zum Fußballfeld können im Internet oder in anderen Medien gefunden werden. Wiederum andere Schüler/innen können auf der symbolischen Ebene agieren. Im offenen Unterricht werden für diese unterschiedlichen Schüler/innen individuelle Zugangsmöglichkeiten geboten. Materialien können angeboten (in der 2. und 3. LG) oder selbst gesucht werden. In gemischten Gruppen können sich Schüler/innen gegenseitig unterstützen.

Vertiefung der Begriffsbildung durch gemeinsame Darstellung

Aebli und Fricke zeigten auf, „dass miteinander verwandte Begriffsbildungen sich gegenseitig stützen und dass gerade die Kontrastierung ähnlicher Begriffe erst eine vertiefte Abgrenzung zulässt“ (siehe *LEUTENBAUER 1994, S. 23*). Nach dem Erlernen von Einzelwissen – in diesem Fall die Berechnung des Flächeninhaltes eines Rechtecks, der Oberfläche und des Volumens einer Pyramide – ist es notwendig, das Gemeinsame und das Unterschiedliche genau herauszuarbeiten.

BEGRIFFSBILDUNG MATHEMATISCHE FACHSPRACHE

Die mathematische Frage- und Problemstellung zu Pyramide und Fläche ist so illustriert, dass die Schüler/innen zum Nachdenken angeregt werden. Der zunächst absurd erscheinende Vergleich einer Pyramide (Körper) mit einem Fußballfeld (Fläche) führt zu einem vertieften Nachdenken über diesen Sachverhalt. Eine Angabe, die sofort einen Vergleich Volumen mit Volumen bzw. Fläche mit Fläche ermöglicht, regt keine Gespräche zu den Grundvorstellungen an. Unterschiedliche Ausgangsinterpretationen führen zu den gewünschten Diskussionen. Erst dann müssen Kompetenzen des kooperativen Handelns eingesetzt werden. Die Begriffe Fläche, Oberfläche, Grundfläche und Volumen werden in der Gruppenarbeit vertieft.

Nachhaltige Lernprozesse anregen

Erkenntnisse lassen sich nicht alleine durch Vorzeigen der Lehrperson auf die Schüler/innen übertragen. Jede/r Schüler/in muss sich das Wissen selbst erarbeiten. Durch das eigenständige Operieren wird Wissen angeeignet und gefestigt. Lern- und Übungsprozess gehen durch das gemeinsame Erarbeiten und gegenseitige Präsentieren ineinander über.

NACHHALTIGKEIT

Offenes Lernen erfordert überfachliche Kompetenzen

Der Einstieg in das offene Lernen mit dem vorliegenden Pyramidenbeispiel in einer Klasse, die offenes Lernen nicht kennt, verursacht vermutlich bei vielen Beteiligten Frustration. *BADEGRUBER* nennt 28 Schritte für das Erlernen offener Lernformen, *KLIPPERT* hat das Methodentraining, das Kommunikationstraining und die Teamentwicklung dem eigenverantwortlichen Lernen vorangestellt. Aus diesem Grund werden drei Varianten – von der strukturierten zur offenen Aufgabenstellung – angeboten. Sind Schüler/innen an offene Aufgabenstellungen noch nicht gewöhnt, kann das Beispiel mit der genauen Arbeitsanleitung ein erster Schritt in diese Richtung sein.

Damit die Schüler/innen der offenen Fragestellung der Variante C gerecht werden können, bedarf es eines gezielten methodischen Aufbaus des Unterrichts in den unteren Klassen. Ziel des Unterrichts soll es sein, Schüler/innen an den Umgang mit offenen Fragestellungen zu gewöhnen und ihnen das Rüstzeug zur Bewältigung dieser Aufgaben mitzugeben.

Überfachliche Kompetenzen ergänzen den mathematischen Lernprozess

Der Zugang zur Aufgabe ist einerseits praxisnah – in der Variante C auch völlig offen und schülerzentriert. Größenvergleiche ohne Datenangabe sind alltäglich. Die entsprechenden Daten zu beschaffen, um sie vergleichbar zu machen, stellt eine Anforderung aus dem Alltag dar. Die Darstellung in Form eines Comics und der – beinahe absurde – Vergleich machen das Beispiel für Schüler/innen interessant und ansprechend. Die Motivation, sich mit der Aufgabe zu beschäftigen, ist damit gegeben.

KOOPERATIVES HANDELN

Die Gruppenarbeit ermöglicht kreative Ansätze. Jede Person in der Gruppe kann ihre Ideen einbringen. Die Schüler/innen setzen sich intensiv und direkt mit der Aufgabenstellung auseinander. Während einzelne Gruppen das Problem selbstständig lösen werden, können andere durch Hilfestellung unterstützt werden.

PRÄSENTIEREN

Bei der Präsentation ist einerseits die Lösung des mathematischen Problems gefordert, andererseits ist auf die Arbeitsweise der Gruppe einzugehen (Arbeitsplan, Informationsbeschaffung, Vorschläge für die Vergleiche und Einigung auf einen oder mehrere Vergleiche, ...). Je mehr Punkte im Kompetenzanzeiger (siehe „Transparenz der Ziele") erfüllt werden, desto wertvoller wird die Lösung der Aufgabe. Dadurch werden die angestrebten Kompetenzen ersichtlich und nachvollziehbar.

MODELLBILDEN

Mathematik ist ursprünglich aus praktischen Problemen erwachsen. Schwer verstehbare Sachverhalte werden durch einen Vergleich mit Bekanntem vereinfacht. Ein Fußballfeld ist für Schüler/innen vertraut und überschaubar. Die Ausmaße einer Pyramide dagegen führen meist zu großem Erstaunen. Die Cheopspyramide ist den Schüler/innen aus dem Geschichte-, Geografieunterricht oder aus den Medien bekannt. Diese Situation ermöglicht es, unterschiedliche Fragestellungen zu entwerfen und unterschiedliche Antworten zu finden.

Der entscheidende Schritt für Schüler/innen ist die Übersetzung der Textaufgabe in die mathematische Aufgabenstellung, das Modellbilden. Die Brücke zu anderen Lebensbereichen und Fächern erleichtert das mathematische Modellbilden.

Aus dem Lehrplan

Die Schülerinnen und Schüler sollen

- mathematisches Können und Wissen aus verschiedenen Bereichen ihrer Erlebnis- und Wissenswelt nutzen sowie durch Verwenden von Informationsquellen weiter entwickeln. Das Bilden mathematischer Modelle und das Erkennen ihrer Grenzen soll zu einem verantwortungsvollen Umgang mit Aussagen führen, die mittels mathematischer Methoden entstanden sind;
- in Verfolgung entsprechender Lernziele produktives geistiges Arbeiten, Argumentieren und exaktes Arbeiten, kritisches Denken, Darstellen und Interpretieren als mathematische Grundtätigkeiten durchführen, wobei sie dazu hingeführt werden sollen, Lernprozesse selbstständig zu gestalten;
- durch das Benutzen entsprechender Arbeitstechniken, Lernstrategien und heuristischer Methoden Lösungswege und -schritte bei Aufgaben und Problemstellungen planen und in der Durchführung erproben;
- verschiedene Technologien (z. B. Computer) einsetzen können.

Transparenz der Ziele, Kompetenzanzeiger

Bei den Varinaten B und C erhalten die Schüler/innen mit der Aufgabenstellung Zielvorgaben, damit sie sich orientieren und ihre Arbeit selbst beurteilen. Sowohl die mathematischen als auch die überfachlichen Kompetenzen werden angeführt.

Erfahrungsberichte

- Schüler/innen finden Comics ansprechend.
- Die Internetrecherche kann je nach Computerangebot unterschiedlich durchgeführt werden: eine Gruppe sucht nach Informationen und gibt sie an andere weiter, alle Schüler/innen haben Zugang zum Internet oder eine/r pro Gruppe sucht nach Informationen.
- Die zusätzlichen Informationen aus dem Internet regen unterschiedliche Modellbildungen und Lösungswege an.
- Schüler/innen kommen auf Lösungswege, die vorher nicht absehbar waren, z. B. wird diskutiert, wie viele Steinblöcke der Pyramide auf der Fläche des Fußballfeldes Platz haben könnten, oder es wird ein Schwimmbecken mit der Pyramide verglichen („da kann man alle Dimensionen vergleichen"); auch andere Sportplätze (z. B. Tennisplatz oder Basketballplatz) wurden für den Vergleich gewählt.
- Für Schüler/innen ist der Vergleich von Fußballfeld und Pyramide nichts Außergewöhnliches – jede/r kennt ein Fußballfeld aus dem Leben und die Cheopspyramide aus dem Unterricht.
- Manche Lehrer/innen stehen dem Beispiel von vornherein skeptisch gegenüber. (Es müsste genauer untersucht werden, ob das Lehrer/innen sind, denen offene Beispiele unbekannt sind.)
- Wenn Schüler/innen Gruppenarbeit gewohnt sind, gibt es auch bei der offenen Variante keine Probleme, andernfalls muss auf klare Regeln bei der Gruppenarbeit geachtet werden.
- Präsentationen werden sehr eintönig, wenn Schüler/innen keine unterschiedlichen Präsentationsformen kennen. Dies wäre eine wesentliche Vorarbeit.
- Eine weitere gute Voraussetzung ist gegeben, wenn Schüler/innen lernzielorientiertes Lernen gewohnt sind.

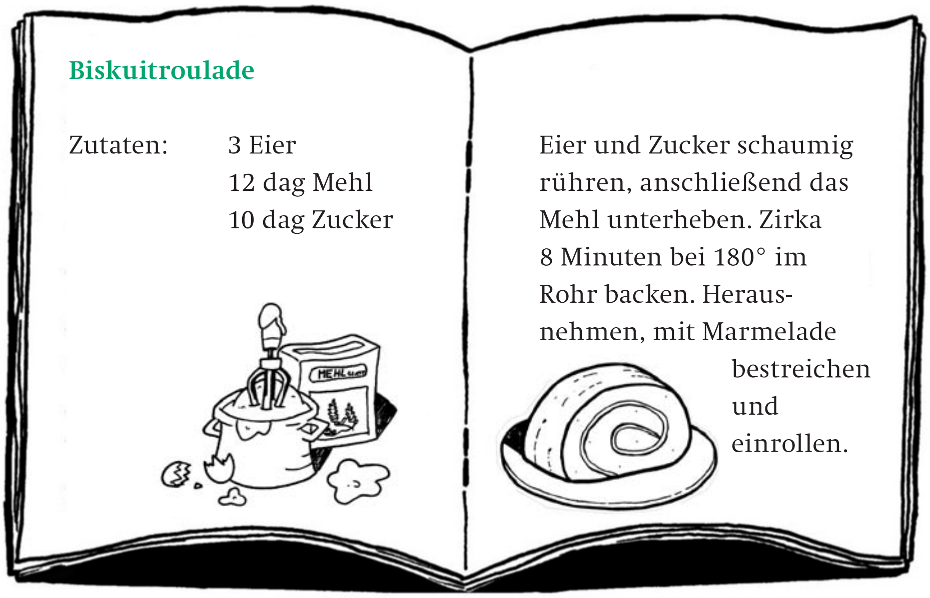
Originalzitate von Lehrer/innen

„Durch den großen Arbeitsaufwand vergessen die Schüler/innen oft auf die Mathematik."
Kommentar: Wenn Methoden für Schüler/innen neu sind, konzentrieren sie sich zunächst darauf. Ist die Methode bekannt, rückt die Mathematik wieder in den Mittelpunkt.

„Für Präsentation zu wenig Zeit."
Kommentar: Nachhaltiges Lernen braucht Zeit. Präsentation ist ein wesentlicher Faktor für Nachhaltigkeit. „Was ich präsentieren kann, habe ich verstanden."

BISKUITROULADE

Sonjas Mutter hat sich bereit erklärt, für das Schulfest möglichst viele Biskuitrouladen zu backen. Als sie mit dem Backen beginnen will, haben die Lebensmittelläden bereits geschlossen. In ihrem Lebensmittelvorrat finden sich 29 Eier, 75 dag Zucker, 1,5 kg Mehl und Marillenmarmelade für mindestens 12 Rouladen. Wie viele Rouladen kann Sonja höchstens zum Schulfest mitbringen, wenn die Mutter folgendes Rezept verwendet?



Mögliche Lösungswege

Die Schüler/innen erkennen, dass die vorhandene Zahl an Eiern, die vorhandene Mehl- und Zuckermenge mit den Angaben im Rezept zu vergleichen sind.

Ich kann den gegebenen Sachverhalt erfassen und mathematische Beziehungen darin erkennen.

Möglichkeit 1
Eine dafür geeignete Rechenoperation ist die Division. Gegebenenfalls kann die Division auch durch wiederholte Subtraktion oder Addition ersetzt werden.

Die erhaltenen Ergebnisse müssen verglichen werden und die kleinste Zahl muss ausgewählt werden.

Eier:	29 : 3 = 9, ...	d. h., die Eier reichen für 9 Rouladen.
Mehl:	150 dag : 12 dag = 12, ...	d. h., das Mehl reicht für 12 Rouladen.
Zucker:	75 dag : 10 dag = 7, ...	d. h., der Zucker reicht für 7 Rouladen.

Ich kenne verschiedene Maßeinheiten und kann damit umgehen.

oder:

Eier:	29 : 3 = 9, ...	d. h., die Eier reichen für 9 Rouladen.
Mehl:	9 · 12 = 108	d. h., das Mehl reicht ebenfalls.
Zucker:	9· 10 = 90	d. h., der Zucker reicht nur für 7 Rouladen.

Ich kann Berechnungen mit konkreten Zahlen durchführen.

Antwort: Sonja kann höchstens 7 Rouladen mitbringen, weil der Zucker nur für 7 Rouladen reicht.

Möglichkeit 2
Überlegung mit Hilfe von Tabellen, z. B.:

Anzahl der Rouladen	Anzahl der verbrauchten Eier	Benötigte Mehlmenge in dag	Benötigte Zuckermenge in dag
1	3	12	10
2	6	24	20
3	9	36	30
4	12	48	40
5	15	60	50
6	18	72	60
7	21	84	70
8	24	96	80

Antwort: 7 Rouladen können nach diesem Rezept gemacht werden, denn für die 8. Roulade gibt es zu wenig Zucker.

Ich kann das Rechenergebnis interpretieren und eine zur Problemstellung passende Antwort formulieren.

Von Schüler/innen kommentierte Lösungswege

Erste Erprobungen dieser Aufgabe zeigen, dass Schüler/innen je nach Vorwissen sehr unterschiedliche Lösungswege finden. Daher wird erst durch die Bearbeitung der Aufgabe ersichtlich, welche Kompetenzen die Schüler/innen nützen. Die Kommentare der Schüler/innen können interessante Hinweise liefern.

Richtige Lösungen
„Ich schaue, wie viele Biskuitrouladen sich mit 75 dag Zucker ausgehen. Dann vergleiche ich das Ergebnis, ob es sich auch mit Mehl und Eiern ausgeht.“

„Eier: 9-mal, Mehl: 12-mal, Zucker: 7-mal. Sie kann nur 7 Rouladen backen, weil sie zu wenig Zucker hat. Und eine Biskuitroulade ohne Zucker geht nicht.“

„Ausrechnen, wie viele man mit jeder Zutat machen kann. Das niedrigste Ergebnis ist die Antwort. Eier: 29 : 3 = 9 (2 Rest), Mehl: 150 : 12 = 12 (6 Rest), Zucker: 75 : 10 = 7 (5 Rest). Man kann 7 Rouladen machen.“

„Sonja kann 7 Rouladen mitbringen, weil ihre Mutter nur für sieben Zucker zu Hause hat. 5 dag bleiben übrig. Eine halbe Roulade macht sie nicht, weil man ein Ei nicht gut teilen kann.“

Falsche Lösungen

KOMMENTIERTE LÖSUNGEN ERMÖGLICHEN KOMPETENZANALYSE

„12 dag = 1,2 kg“ – Modellbildung, Operieren und Interpretieren sind hier richtig – der Wechsel zwischen verschiedenen Maßeinheiten ist falsch. Soll mit diesem Beispiel bei einer Testung valide die Dimension Modellbilden überprüft werden, ist es sinnvoll, Überlagerung durch diese Dimension wegzunehmen.

„Man muss dividieren und dann alle Ergebnisse addieren.“ – Falsches Modell, richtiger Wechsel zwischen den Maßeinheiten, die Berechnungen mit konkreten Zahlen sind ebenfalls richtig.

„Man muss dividieren und dann alle Ergebnisse mal nehmen.“ – Falsches Modell, richtiger Wechsel zwischen den Maßeinheiten, die Berechnungen mit konkreten Zahlen sind ebenfalls richtig.

Einige Schüler/innen haben zwar richtig dividiert, wussten aber mit den Einzelergebnissen dann nichts mehr weiter anzufangen: *„Jetzt weiß ich leider nicht, wie ich darauf komme, wie sie so und so viele Rouladen backen kann.“*

Kommentar einer Kollegin: *„Die Lösungsrate in meiner 4. Klasse war etwas erschütternd (15 richtig/8 falsch.) Vielleicht sollten wir in Zukunft auf solche Beispiele mehr Wert legen.“*

Mehrere Schüler/innen beantworteten die Frage mit Dezimalzahlen: *„Sie kann 7,5 Rouladen mitbringen.“* Solche Antworten sollen Anlass geben, über sinnvolle Näherungswerte zu diskutieren. In welchem Zusammenhang ist es sinnvoll, über halbe Dinge zu sprechen?

Nebenbemerkung: In der ursprünglichen Aufgabenstellung, die wir den Schüler/innen vorlegten, hatten wir die Marmelade vergessen. Nur wenigen Schüler/innen fiel dies auf, zwei Schüler schrieben: *„Sie könnte 7 Rouladen machen. Aber wenn sie keine Marmelade hat, kann sie gar keine machen.“* – *„Eigentlich gar keine Roulade, denn es fehlt die Marmelade!“*

Überlegungen zur Aufgabenstellung

Bei der Erstellung der Aufgabe ging man davon aus, dass diese Alltagsbezug hat. Um verschiedenste Tätigkeiten im Alltag durchführen zu können (z. B. Herstellung von Werkstücken, Einkäufe für Feiern, ...) ist eine entsprechende Planung erforderlich. Bei der Bearbeitung von Beispielen dieser Art erkennen die Schüler/innen, dass mathematische Modelle die Möglichkeit geben, begründete Antworten zu geben. Die Sätze sind einfach formuliert und auch für Kinder mit nicht deutscher Muttersprache verständlich.

Aufgabenvariationen

Verschiedenste Variationen und auch Differenzierungen der Aufgabenstellung sind möglich. Damit kann die Aufgabenstellung den Interessen und dem Leistungsniveau der Schüler/innen angepasst werden. Dabei können sich auch die Kompetenzen verändern.

Es bietet sich an, die Schüler/innen selbst geeignete Aufgabenvariationen finden zu lassen, um so die Transferfähigkeit zu erhöhen und größere Nachhaltigkeit zu erzielen. Um die zur Bearbeitung erforderlichen Kompetenzen nachhaltig zu festigen, ist es notwendig, diese vom speziellen Beispiel zu lösen.

Beispiel einer Variation

Aufgabenstellung
Im Werkunterricht sollen CD-Regale hergestellt werden. Laut Bauanleitung benötigt man für die Herstellung eines Regals folgende Materialien:

Anzahl	Material
3	dreieckige Bretter
6	viereckige Leisten je 50 cm
60	Rundhölzer je 12 cm
12	Holzdübel
	Leim

Rudi muss für seine Werkgruppe die benötigten Materialien vorbereiten.
Er findet im Werksaal:

27 dreieckige Bretter
55 viereckige Leisten je 50 cm lang
450 Rundhölzer je 12 cm lang
einen Kübel Leim
1 Packung mit 100 Holzdübeln

Wie viele CD-Regale können aus dem vorhandenen Material gebaut werden?
Begründe deine Antwort.

Lösung: 7 Regale können gebaut werden, weil nur dementsprechend viele Rundhölzer vorhanden sind.

MORGENDRINK

500 Schülerinnen und Schüler einer Schule wurden nach ihren bevorzugten Frühstücksgetränken befragt. Es war nur eine der angeführten Antworten anzukreuzen.

☐ Kakao
☐ Kaffee
☐ Milch
☐ Tee
☐ Saft
☐ Sonstiges

Die Auswertung führte zu folgender Häufigkeitstabelle:

Kakao	Milch	Saft	Kaffee	Tee	Sonstiges
124	160	62	46	72	36

Die Daten werden auf vier verschiedene Arten dargestellt (siehe Beilageblätter 1 – 4).

Phase 1: Einzelarbeit
Mach dich mit der vorgelegten Darstellungsform vertraut.

Phase 2: Expertengruppen
Tauscht eure Erkenntnisse aus.
Was soll im Heft über diese Darstellungsform festgehalten werden?
Bereitet für die Mixgruppen eine Erklärung vor.

Phase 3: Mixgruppen
Stelle deine Darstellungsform in der Mixgruppe vor und gib an, was davon im Heft festgehalten werden soll.
Erstellt gemeinsam ein Lernplakat, welches die Merkmale der verschiedenen Darstellungsformen beschreibt.

Phase 4: Präsentation der Plakate

Anmerkung: Die Beilageblätter 1 – 4 befinden sich als Kopiervorlage im Anhang.

Überlegungen zur Aufgabenstellung

Es wird vorausgesetzt, dass die Begriffe relative und absolute Häufigkeit den Schüler/innen bereits bekannt sind. In den Beilageblättern werden Fußnoten bewusst eingesetzt, damit die Schüler/innen damit umgehen müssen.

Diese Aufgabe kann zur Neubearbeitung oder zur Wiederholung des bereits Gelernten eingesetzt werden und leistet damit einen Beitrag zum nachhaltigen Lernen.

Autonomes Lernen

Im ersten Lernprozess (eigenständiges Durchlesen und Erkunden, Experten-, Mischgruppen) steht das autonome Lernen im Vordergrund. Schüler/innen eignen sich Lerninhalte an. Bei dieser Aufgabenstellung kann der gesamte Prozess von der Umfrage bis zur Interpretation vorgezeigt werden (siehe „Mögliche Erweiterungen des Gelernten").

Gruppenpuzzle
Für die Gruppenarbeit empfiehlt es sich, die Methode Gruppenpuzzle (Expertengruppen, Mischgruppen) anzuwenden, da sich der gesamte Lehrinhalt in vier unabhängige Teile zerlegen lässt. Die Schüler/innen erleben sich durch die Methode Gruppenpuzzle in verschiedenen Rollen (vom Lernenden zum Experten und Vermittler) und können das Erlernte sofort anwenden. Sie erhalten zugleich einen Überblick über die Grundelemente der statistischen Darstellungsformen. Vorkenntnisse helfen ein neues Themengebiet eigenständig zu erarbeiten. Dadurch werden Strategien zum autonomen Lernen erarbeitet.

Vorbereitung des Gruppenpuzzles (für 24 Schüler/innen):
Drei Blätter der Beilage 1 werden mit A 1, A 2, A 3, drei weitere Blätter der Beilage 1 mit B 4, B 5, B 6 beschriftet.
Drei Blätter der Beilage 2 werden mit C 1, C 2, C 3, drei weitere Blätter der Beilage 2 mit D 4, D 5, D 6 beschriftet.
Drei Blätter der Beilage 3 werden mit E 1, E 2, E 3, drei weitere Blätter der Beilage 3 mit F 4, F 5, F 6 beschriftet.
Drei Blätter der Beilage 4 werden mit G 1, G 2, G 3, drei weitere Blätter der Beilage 4 mit H 4, H 5, H 6 beschriftet.

Für die Phase 2 (Expertengruppen) ist nur der Buchstabe von Bedeutung (3er-Gruppen). Gleiche Buchstaben bilden eine Gruppe, hier werden Experten ausgebildet.

Für die Phase 3 (Mixgruppen) ist nur die Ziffer von Bedeutung (4er-Gruppen). Gleiche Ziffern bilden eine Gruppe. Daher sitzen in einer Mixgruppe vier Experten der verschiedenen Darstellungsformen.

Hat man mehr als 24 Schüler/innen bildet, man so genannte Tandems (A 1, B 2, C 3, D 4, E 5, F 6 doppelt; A 2 doppelt usw.). Man muss bei der Bildung der Tandems nur darauf achten, dass keine Gruppe zu groß wird.

Hat man weniger als 24 Schüler/innen, vergibt man nur die Buchstaben A, B, C und D und kombiniert

- die Ziffern 1 bis 5 (20 bis 23 Schüler/innen) mit den entsprechenden Tandems (max. 3).
- die Ziffern 1 bis 4 (16 bis 19 Schüler/innen) mit den entsprechenden Tandems (max. 3) usw.

Die Buchstaben bilden wieder die Expertengruppen, die Ziffern die Mixgruppe.

Die Arbeitsanleitungen können von der Lehrperson schriftlich oder mündlich mitgeteilt werden.

Phase 1
Jede/r Schüler/in erhält nach dem Zufallsprinzip ein Beiblatt (mit der Beschriftung A 1, ...) für die Gruppeneinteilung. Ein erstes Vertrautmachen mit den Inhalten in einer Einzelarbeit bereitet auf die gemeinsame Arbeit vor.

Phase 2
Einteilung der Klasse in Gruppen: Schüler/innen mit dem gleichen Buchstaben auf dem Beiblatt bilden eine so genannte Expertengruppe.

- Gruppen A und B mit Beiblatt 1:
  Darstellung der Datenmenge durch ein Säulendiagramm
- Gruppen C und D mit Beiblatt 2:
  Darstellung der Datenmenge durch einen Prozentstreifen
- Gruppen E und F mit Beiblatt 3:
  Darstellung der Datenmenge durch ein Piktogramm
- Gruppen G und H mit Beiblatt 4:
  Darstellung der Datenmenge durch ein Kreisdiagramm

INFORMATIONEN BEARBEITEN UND DARSTELLEN

In der Expertengruppe werden die Darstellungen kommentiert, aufgearbeitet und für ein Handout zusammengefasst (im Wesentlichen die ersten zwei oder drei Sätze des Beiblatts), das in der Mixgruppe weitergegeben werden kann. Jedes Gruppenmitglied muss die erarbeitete Darstellungsform anderen Schüler/innen erklären können.

An dieser Stelle kann von der Lehrperson kurz überprüft werden, ob die Expertengruppe tatsächlich in der Lage ist, die Darstellungsform zu erklären. Es hat sich in der Praxis bewährt, in den Expertengruppen Fragen zum Verständnis zu stellen, damit die Experten richtige Informationen weitergeben.

Den Expertengruppen kann jeweils ein/e leistungsstarke/r Schüler/in zugeordnet werden oder die Lehrperson unterstützt die leistungsschwächeren Schüler/innen.

Phase 3

GEGENSEITIGE VORSTELLUNG DER LERNERGEBNISSE

Einteilung der Klasse in Mixgruppen: Schüler/innen mit gleichen Ziffern auf dem Beiblatt bilden eine Gruppe. Es muss gewährleistet sein, dass in jeder Gruppe jede Darstellungsform (mindestens) einmal vorkommt.

In der Mixgruppe werden die in den Expertengruppen erarbeiteten Handouts von den jeweiligen „Experten“ erklärt und ausgetauscht. Das Wesentliche wird im Heft festgehalten. Die Erkenntnisse der einzelnen Arbeiten in den Expertengruppen werden zusammengefasst und gemeinsam in einer Präsentation verarbeitet (z. B. Erstellung eines Lernplakats).

Phase 4
Die Präsentation kann in jeder gewünschten Form stattfinden. Eventuell bestimmt man nur einige Gruppen durch Los, die ihre Plakate (Folien u. a.) präsentieren sollen.

Mögliche Erweiterungen des Gelernten

An der Weiterführung der Lernsequenz kann erkannt werden, ob die Schüler/innen in den Experten- und Mixgruppen die vier Darstellungsformen wirklich gelernt haben.

NACHHALTIGES LERNEN DURCH ANWENDEN

Mögliche Aufgabenstellung zur Festigung des Gelernten und Förderung des nachhaltigen Lernens: Anwendung – Darstellungsformen – Partnerarbeit
Führt eine Umfrage unter den Schüler/innen der Klasse/Gruppe durch. Zur Auswahl stehen folgende Themen:

- Welche Frühstücksgewohnheiten gibt es in der Klasse?
- Wie viele Stunden pro Tag verbringen die Schüler/innen mit Fernsehen?
- Wie viel Taschengeld bekommen die Schüler/innen pro Monat?
- Wie viel kostet das Handy pro Monat?

Wertet eure Umfrage aus und stellt sie in den vier Grafiken (mit Computerunterstützung) dar.

Eine weitere Anwendungsmöglichkeit ist das Interpretieren von Darstellungen aus aktuellen Tageszeitungen.

Erfahrungen aus der Praxis

Die Arbeit mit dem Computer erleichtert die Darstellung sehr. Der PC-Einsatz ermöglicht auch leistungsschwächeren Schüler/innen Erfolgserlebnisse durch ansprechende Darstellungen. Die Motivation bei der Arbeit wird erhöht. Auch leistungsschwachen Schüler/innen macht es nach dem Erlernen kaum Probleme, die Darstellungen händisch auszuführen.

COMPUTERGESTÜTZTES LERNEN

Beim Piktogramm entstehen meist sehr kreative Lösungen. Der Prozentkreis ist zwar am Anfang etwas schwieriger, die Darstellung scheitert jedoch öfter am nicht vorhandenen Zirkel als an den Berechnungen.

PROZENTSCHNAPSEN

Jede Gruppe (2 bis 4 Personen, Zufallsgruppen) erhält ein Kartenpaket bestehend aus Aufgabenkarten und Spielanleitung.

Lest die Spielanleitung durch, führt das Spiel aus. Füllt nach mehreren Durchgängen den Kompetenzanzeiger aus und vergleicht eure Eintragungen mit jenen der Lehrperson.

Bei deiner Lehrperson liegt ein Lösungsblatt für das Spiel auf, das du in Ausnahmefällen benutzen kannst.

Anmerkung: Kopiervorlagen für die Spielkarten der Variante A, die Lösungen und die Kompetenzanzeiger befinden sich im Anhang. Kopiervorlagen für die Varianten B, C und L finden Sie auf www.gemeinsamlernen.at.

Überlegungen zur Aufgabenstellung

Die Schüler/innen setzen sich selbstständig mit Kopfrechnen und in ihrer Gruppe mit den Spielregeln auseinander und führen das Spiel aus. Es wird ein Wechselspiel zwischen schnellem und sehr ungenauem Abschätzen, genauerem Abschätzen und einer genauen Rechnung für die Zuteilung der Stiche notwendig sein. Will man erreichen, dass jede Rechnung im Kopf ausgeführt wird, setzt man einen weiteren Schüler/eine weitere Schülerin mit einem Lösungsblatt zur Spielgruppe. Jede/r Spieler/in muss den Wert der ausgespielten Karte laut aussprechen, das Ergebnis wird von dem Schüler/der Schülerin mit den Lösungen kontrolliert.

Einfache Prozentrechnungen, wie sie im Alltag vorkommen, sollen im Kopf durchgeführt werden. Das Spiel für 2 – 4 Personen kann ab der 6. Schulstufe unter geringem Zeitaufwand immer wieder eingesetzt werden. Die Lernenden können erkennen, dass regelmäßiges Wiederholen auch in angenehmer Situation Nachhaltigkeit fördert.

Der Einsatz des Kompetenzanzeigers kann den Schüler/innen erläutert werden. Die für die 3. Leistungsgruppe vorgesehene Variante L kann mit den Schüler/innen gemeinsam besprochen werden, bevor das Spiel in Gruppenarbeit gespielt wird.

Im Anschluss an das Spiel werden die Kompetenzanzeiger ausgeteilt. Jede Schülerin, jeder Schüler füllt den Kompetenzanzeiger aus und schätzt damit ihr/sein eigenes Verhalten ein. Die individuellen Einschätzungen werden in der Gruppe verglichen und besprochen. Die Erarbeitung der Spielregeln, die Einigung über die Durchführung des Spiels und der Spielablauf in der Gruppe verlangen von den Gruppenmitgliedern kooperative Fähigkeiten. Einzelne Gruppen erhalten Rückmeldungen von der Lehrperson, die ihrerseits Aufzeichnungen über die Gruppenarbeit führt. Die Aufzeichnungen werden mit den Standards verglichen, welche im Kompetenzmodell unter C3 „Kooperatives Handeln" angeführt sind (siehe Bildungsstandards für Mathematik am Ende der 8. Schulstufe, Version 3.0). Dadurch können Lernende und Lehrende überprüfen, welche Standards bereits erfüllt sind.

Kartenspiele können auch von den Schüler/innen selbstständig in Gruppen entwickelt und gegenseitig getestet werden.

Das Kartenspiel wird in vier verschiedenen Varianten angeboten:

- einfache Beispiele zur Berechnung von Prozentanteilen, die im Kopf durchgeführt werden (Variante L, speziell für die 3. Leistungsgruppe)
- Berechnung von Prozentanteilen bzw. einfache lebenspraktische Beispiele, die im Kopf durchgeführt werden (Variante A, B, ab 2. Leistungsgruppe)
- lebenspraktische Prozentrechnungen, bei denen der Endpreis gefragt ist (Skonto, Rabatte, Mehrwertsteuer, Preiserhöhungen, Preisermäßigungen, Preisnachlässe) mit aufwändigeren Kopfrechnungen („Endpreisschnapsen", Variante C, für AHS / 1. Leistungsgruppe)

Kartenspiel zur Erreichung kooperativer Fähigkeiten

Fast jede Schülerin/jeder Schüler hat Erfahrung mit Kartenspielen, bei denen es sich um „hoch sticht nieder" handelt. Jede/r geht mit bestimmten Voreinstellungen an das Spiel heran. Auch wenn jeder Einzelne Vorstellungen davon hat, wie das Spiel ablaufen soll, müssen diese Vorstellungen erst in der Gruppe abgeglichen werden. In einem gemeinsamen Vereinbarungsprozess ergeben sich konkrete Spielregeln für das gemeinsame Spiel. Dabei geht es um grundlegende Kompetenzen wie z. B.:

- Regeln lesen und ein eigenes Verständnis erlangen
- Regeln kommunizieren
- Regeln interpretieren und mit den eigenen Regeln vergleichen und abstimmen
- Fragen stellen

Bei einem ersten Probespiel könnten Fragen und Feststellungen wie „Warum haben wir verschiedene Modelle?", „Die Regeln sind widersprüchlich", „Es wurde nicht genau genug gelesen", „Das hast du falsch interpretiert" oder Ähnliches auftauchen. In einer Reflexion über das Spiel könnte ein Nachdenken über die Spielvorstellungen der Spieler/innen erfolgen. Unterschiedliche Wahrnehmungen des Textes, Widersprüche in den Regeln, eigene Fehlinterpretationen, ... werden sichtbar. Schüler/innen befassen sich mit dem eigenen Modell, ändern es ab oder geben es eventuell sogar auf und nehmen ein fremdes Modell an. Im Spiel zeigt sich dann, wie sich die Vereinbarungen bewähren. Neue Diskussionen können bei neuen Spielsituationen, wie z. B. gleicher Wert der ausgespielten Karten, auftreten.

UMGANG MIT REGELN
KOOPERATIVE KOMPETENZEN

Meist ist ein Hinführen der Schüler/innen zur Erarbeitung von Spielregeln in der Gruppe notwendig. Die folgenden kooperativen Kompetenzen werden, sofern sie nicht bereits vorhanden sind, dabei eingeübt:

- Umgang mit und Einhaltung von Regeln
- Vertrauen in ein gemeinsames Regelverständnis und damit Vorteile von Regeln (kein Streit, schnelleres und angenehmeres Spiel)
- Nachteile von Regeln (Einengung des Spiels, bei längerem Spiel wird es eventuell eintönig)
- Regeln (Ergebnisse) auf ihre Sinnhaftigkeit überprüfen
- Abänderung von Regeln oder Einführung neuer Regeln bei einem Konsens in der Gruppe

KOMMUNIKATION
KRITISCHES DENKEN

- Kommunikationskompetenzen: z. B. aktives Zuhören, Schwierigkeiten ansprechen, Mehrheitsentscheidungen akzeptieren
- Kritisches Denken und Reflexion: z. B. eigene Meinung angemessen vertreten, mit Widersprüchen zur eigenen Meinung umgehen

Was hat das mit Mathematiklernen zu tun?
Bei der Lösung mathematischer Probleme spielt sich Ähnliches ab wie beim Finden von Spielregeln: Modellbilden, Abgleichen von Modellen, Finden von Lösungen, Ausprobieren, Interpretieren, Vergleichen mit der Angabe, Begründen.

VOREINSTELLUNGEN
VERMUTUNGEN
KONSTRUKTIVISTISCHES LERNEN

Bei der Bearbeitung einer mathematischen Aufgabe spielen Grundvorstellungen eine große Rolle. Zunächst werden Zusammenhänge überlegt und Vermutungen aufgestellt. In der Kommunikation mit anderen und bei der Suche nach Lösungen werden persönliche Einstellungen verändert oder verworfen. Diese Art des Denkens soll wegführen von der Suche nach *der* Formel zur Lösung. Mathematik ist in diesem Sinne eine mentale Konstruktion, sie wird erfunden und ausgehandelt. Schüler/innen konstruieren sich ihre eigene mathematische Wirklichkeit – wie sie sich beim Spiel ihre eigene Spielwirklichkeit schaffen. Der individuellen kognitiven Struktur der Schüler/innen wird damit Rechnung getragen, Eigenaktivität beim Wahrnehmen und beim Lernen wird ernst genommen. Der/die aktiv Lernende konstruiert sein/ihr mathematisches Wissen – sowohl brauchbares (ausbaufähiges) als auch falsches.

STRATEGIEN ZUR LÖSUNG VON PROZENTRECHNUNGEN IM ALLTAG

Im konkreten Fall geht es darum, möglichst einfache Verfahren zur Lösung der Prozentrechenaufgaben zu finden. Die Prozentrechenaufgaben stellen – je nach Leistungsniveau – unterschiedliche Anforderungen an Schüler/innen. Gefordert sind Kompetenzen wie: mit Prozenten umgehen können, Fachbegriffe kennen, Subtraktionen ausführen können.

Nicht alle Schüler/innen werden Strategien verfügbar haben, mit denen sie diese Aufgaben bewältigen können. In der Gruppe und beim gemeinsamen Spiel können Schüler/innen angemessene Kopfrechenverfahren für diese einfachen Prozentrechnungen entwickeln. Zum Beispiel könnte der Denkprozess einer Schülerin bzw. eines

Schülers bei der Aufgabe 25 % Rabatt bei 1 000 € folgendermaßen ablaufen: Rabatt bedeutet Abzug; 25 % bedeutet 1⁄4 von; 1⁄4 von 1 000 ist 250; werden von 1 000 € 250 € abgezogen, bleiben 750 € übrig. Möglicherweise hat jemand eine andere Lösungsstrategie, z. B. 10 % von 1 000 € sind 100 €, 20 % sind 200 € und die Hälfte von 100 € ergibt 250 €.

Weiters gilt es herauszufinden, welche Spielkarten eine ähnliche Strategie erfordern. Das gemeinsame Herangehen an das Problem in der Gruppe, das „laute Denken“ einzelner Schüler/innen, um das eigene Modell anderen zu verdeutlichen, führt zu einer Vertiefung des eigenen Lernprozesses. Die Wiederholung des Spiels garantiert eine Festigung der Rechenverfahren und ermöglicht längerfristig ein Anwenden dieser Verfahren auch in anderen, alltäglichen Situationen.

Was wird noch gelernt?

Kann sich die Gruppe nicht einigen bezüglich der Regeln oder bei bestimmten Spielsituationen (Wie hoch ist der Wert der Karte?), kann es zu Konflikten kommen. Das Verhalten einzelner Spieler/innen hat Rückwirkungen auf die Gruppe.

KONFLIKTE KONSTRUKTIV LÖSEN

Konflikte können von der Gruppe delegiert (Bitte einen Schiedsrichter! Das Lösungsblatt bitte ...) oder von ihr selbst aufgearbeitet werden. Schwierigkeiten, die sich aus fehlenden mathematischen Fähigkeiten ergeben (z. B. wird das Spiel langsam, wenn die Kopfrechnungen zu lange dauern), führen durch Selbstregulation meistens zu dem von Mathematiklehrer/innen erwünschten Ergebnis.

Wird die oben beschriebene Sequenz – nacheinander reden – aktiv zuhören – eigene Meinung mit der Meinung anderer vergleichen usw. – bewusst eingesetzt, kann sie bei der Bewältigung von Konflikten verschiedenster Art hilfreich sein.

Wie können kooperative Lernprozesse reflektiert werden?

KOOPERATIVE LERNPROZESSE REFLEKTIEREN

Der Kompetenzanzeiger für die Schülerin/den Schüler soll eine Hilfe darstellen, Konflikte in der Gruppe differenzierter zu sehen bzw. die Ursache von Konflikten schneller zu erkennen.

Das Ausfüllen des Kompetenzanzeigers verlangt von den Schüler/innen ein hohes Maß an Selbsteinschätzung; der von der Lehrerin/dem Lehrer ausgefüllte Kompetenzanzeiger erlaubt der Lehrperson Rückmeldungen an die Gruppe, da sich die einzelnen Punkte entsprechen. Die Schülerin/der Schüler erhält auf Grund der Fremdeinschätzung Informationen über ihr/sein kooperatives Handeln und kann diese mit den eigenen Aufzeichnungen vergleichen.

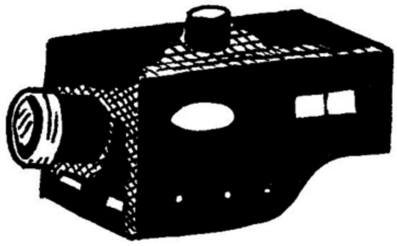
SPIELERLEBNIS

Bei all diesen Überlegungen darf nicht übersehen werden, dass ein Spiel, auch wenn es mathematischen Inhalt besitzt, für die Schüler/innen auch Spiel bleibt. Die Faktoren Unterhaltung, Spaß und Gruppenerlebnis dürfen nicht verloren gehen, sie tragen dazu bei, dass Übungsphasen für die Schüler/innen angenehmer, abwechslungsreicher und eben spielerischer werden.

ÜBERWACHUNGSKAMERA

Arbeite mit dem Geometrieprogramm „GeoGebra“.

Du kannst grundlegende Elemente des Programms kennen lernen, indem du die Aufgaben auf dem Arbeitsblatt löst. Screenshots sollen dir dabei helfen.



Löse anschließend folgende Aufgabe:

Eine Überwachungskamera soll so gebaut werden, dass sie von zwei Straßen gleich weit entfernt ist und von einer Transformatorstation einen Abstand von 5 LE (Längeneinheiten) hat.

Auf einem Plan sind die Punkte A (2/1), B (12/2) und C (4/8) einzuzeichnen. Durch die Punkte A und B und durch die Punkte A und C verlaufen die geraden Straßen. Im Punkt D (10/4) befindet sich die Transformatorstation.

Zeichne die Angaben und ermittle durch Konstruktion die Lage der Orte, an denen die Überwachungskamera gebaut werden kann.

Anmerkung: Die Kopiervorlagen (Screenshots und Arbeitsblatt) befinden sich im Anhang.

Mögliche Lösungswege

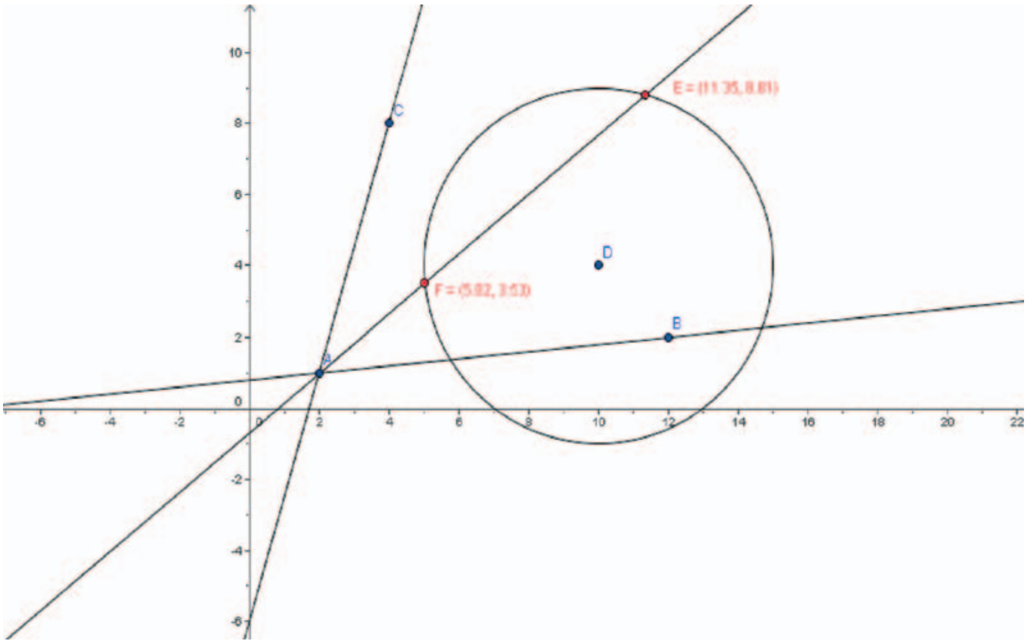
In ein Koordinatensystem werden die Punkte, die notwendigen Verbindungen, die Winkelsymmetrale des Winkels $\sphericalangle$ BAC und ein Kreis k (D;5 LE) gezeichnet. Die Schnittpunkte der Winkelsymmetrale mit dem Kreis ergeben die Standorte.

Lösung: 1. Ort (5,02 / 3,53), 2. Ort (11,35 / 8,81)

Die Schüler/innen können auch experimentell vorgehen, indem sie auf dem Kreis Punkte wählen und deren Abstände zu den Geraden messen. Durch Probieren (Ziehen des Punktes auf dem Kreis) kommen sie auch so zu einer Näherungslösung.

Hinweis: Wird mit der rechten Maustaste ein Objekt angeklickt, können neben verschiedenen Einstellungen unter anderem auch die Eigenschaften des Objekts (somit auch die Formatierung) verändert werden.

Konstruktion mit Konstruktionsprotokoll (erhältlich im Menü „Ansicht“):



Die Kamera kann an den Orten F (5/3,5) und E (11,4/8,8) aufgestellt werden.

Das Konstruktionsprotokoll könnte so aussehen:

Nr.	Name	Definition
1	Punkt A	
2	Punkt B	
3	Punkt C	
4	Gerade a	Gerade durch A, B
5	Gerade b	Gerade durch A, C
6	Punkt D	
7	Gerade c	Winkelsymmetrale von B, A, C
8	Kreis k	Kreis mit Mittelpunkt und D und Radius 5
9	Punkt E	Schnittpunkt von d, c
9	Punkt F	Schnittpunkt von d, c

Überlegungen zur Aufgabenstellung

Das benötigte (kostenlose) Programm GeoGebra wird auf www.geogebra.at zusammen mit der jeweils neuesten Version von JAVA zum Download angeboten. Es kann auch online benutzt werden.

Lernen mit Anleitung

Die Aufgabe hat in erster Linie den Sinn, Schüler und Schülerinnen mit einer neuen Situation zu konfrontieren und ihnen die Möglichkeit zu geben, sich nach Anleitungen neue Erkenntnisse anzueignen. Diese Vorgangsweise kommt im Alltag bei Bedienungsanleitungen häufig vor. Die Schüler/innen erhalten die Screenshots und das Arbeitsblatt. Mit diesen Anleitungen sollten sie sich mit dem Programm vertraut machen. Erfahrungsgemäß haben die Schüler/innen sehr unterschiedliche PC-Kenntnisse. Erfahrene Schüler/innen können als Tutor/innen eingesetzt werden, wobei es wichtig ist, ihnen diese Rolle genau zu erklären: Sie geben Anleitungen nur auf gezielte Fragen, lassen die Lernenden immer selbst arbeiten und tippen nichts vor. Im Vordergrund soll stets das eigenständige, selbst entdeckende Lernen, das Experimentieren und Ausprobieren stehen.

Um die Syntax für die Eingabe zu erlernen wird ein genaues und aufmerksames Lesen des Arbeitsblattes notwendig sein. Die Schüler/innen sollen das Erarbeiten neuer Lerninhalte, die auf einem bekannten Lernstoff aufbauen, bei dieser Aufgabe bewusst erleben.

EIGENSCHAFTEN GEOMETRISCHER OBJEKTE

VERNETZTES DENKEN

Das Konstruieren mit Hilfe dynamischer Zeichenprogramme setzt eine genaue Kenntnis der geometrischen Grundbegriffe voraus. Die Auseinandersetzung mit der Angabe, das Umsetzen in ein geometrisches Modell und damit aus den erforderten Eigenschaften das entsprechende geometrische Objekt zu erkennen und auszuwählen erfordert ein vernetztes Denken und eine genaue Kenntnis der Eigenschaften geometrischer Objekte.

Sollte den Schüler/innen die Winkelsymmetrale nicht bekannt sein, müssen sie sich im Schulbuch informieren oder die Lehrperson nach deren Eigenschaften fragen.

Erfahrene Schüler/innen wollen sehr bald auch Formatierungen vornehmen oder sonstige Tools kennen lernen und nutzen. Tipps dazu können jederzeit auf Verlangen gegeben werden.

Sind die Schüler/innen einmal mit dem Programm vertraut, kann es im Unterricht sehr vielfältig eingesetzt werden. Sämtliche geometrische Konstruktionen der Sekundarstufe I können damit durchgeführt werden, geometrische Überlegungen experimentell überprüft oder entdeckt werden.

Zahlreiche Arbeitsblätter und Hinweise zum Einsatz im Unterricht finden Sie unter www.geogebra.at.

BAUAUFGABE UND BAUSTEINE

Einführung in das Konzept „Bauaufgabe und Bausteinaufgaben“

Bauaufgaben

Bauaufgaben sind komplexe Beispiele, die mehrere verschiedene mathematische Inhaltsdimensionen und Handlungsdimensionen in einer Aufgabenstellung vereinen. Daher sind für ihre Bearbeitung verschiedene Kompetenzen erforderlich. Sie stellen in der Regel höhere Anforderungen im Bereich Modellbilden, weil sie den Lösungsweg nicht vorzeichnen, sondern die Schüler/innen veranlassen, eigenständig Wege zur Bearbeitung der Fragestellung zu finden.

Bei der Bearbeitung dieser Beispiele ist es erforderlich, auch weiter zurückliegende Lerninhalte mit Aktuellem zu verknüpfen. Dadurch wird die Notwendigkeit der Nachhaltigkeit der erworbenen Bildung aufgezeigt bzw. gefördert.

VERNETZES DENKEN

Wird von Schüler/innen verlangt, dass sie Kenntnisse und Fertigkeiten in wechselnden Situationen einsetzen können, so ist es notwendig, diese immer wieder in verschiedenen Kontexten und unter wechselnden Aspekten einzusetzen. Dieses Los lösen von Fähigkeiten und Wissen aus dem erlernten Kontext führt zugleich zu einer Vernetzung verschiedener mathematischer Inhalte und Strategien (*vgl. BÜCHTER/LEUDERS 2005, S. 153 f.*).

Kritisches Durchforsten der Aufgabenstellung, Erkennen mathematischer Beziehungen sowie strukturiertes Arbeiten sind zur Bearbeitung dieser Aufgaben erforderlich. Den Schüler/innen werden, anders als bei der kleinschrittigen Stufung, die einzelnen Lösungsschritte nicht vorgegeben. So lernen sie, selbstständig Lösungsabläufe zu planen und Hindernisse zu überwinden.

Da Teilaufgaben unterschiedlicher Schwierigkeitsniveaus anfallen, sind Bauaufgaben insbesondere auch für den Einsatz in leistungsgruppenübergreifenden Lernsequenzen geeignet. Die Lösung der Aufgabe erfordert, dass die Schüler/innen überlegt an die

Problemstellung herangehen und versuchen, sich selbstständig in den betreffenden Stoffgebieten zurechtzufinden. Somit lernen und üben sie in Sinnzusammenhängen. Dies entspricht dem Wesen der Mathematik in ihrem Nutzen (*vgl. WITTMANN 1992, S. 164*).

Meist werden bei Bauaufgaben auch Lesekompetenz, Textverständnis, Umwelterfahrungen, ... eingesetzt und geübt. Somit bieten Bauaufgaben auch gute Möglichkeiten, überfachliche Kompetenzen zu trainieren.

Bausteinaufgaben

Bausteinaufgaben stellen „Hilfsmittel" zum Bearbeiten von Bauaufgaben dar. Sie beinhalten in der Regel nur eine Handlungsdimension und eine inhaltliche Dimension, die in der dazugehörigen Bauaufgabe auftreten.

Bausteinaufgaben können sowohl vor Bearbeitung der Bauaufgabe als auch danach effektiv eingesetzt werden.

Vorarbeit
Das Ziel ist, die einzelnen mathematischen Inhalte isoliert zu wiederholen, damit sie dann in einem anderen Kontext erkannt und benutzt werden können. Sie können als Wiederholung in die Unterrichtsstunden eingebaut, aber auch als Hausübungsbeispiele verwendet werden.

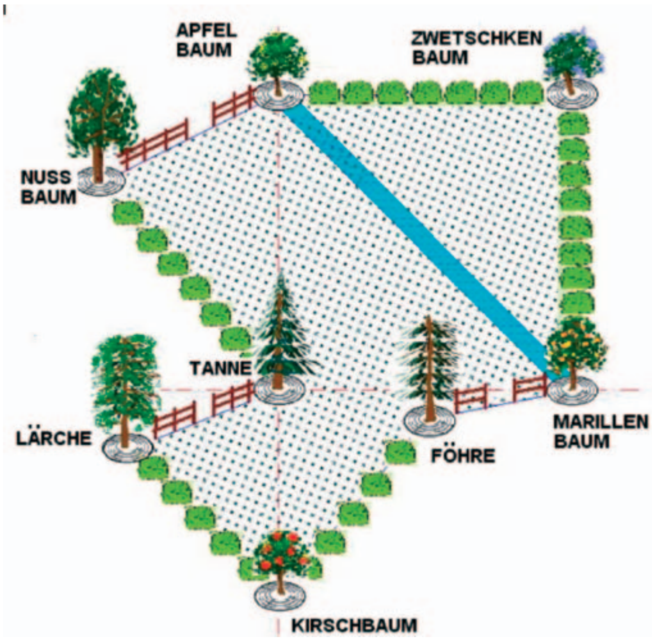
Sind alle oder zumindest einige Bausteine bearbeitet worden, wird die Bauaufgabe „nachgeliefert" und es gilt, in einem anderen, komplexeren Kontext die Einzelprobleme zu erkennen und Lösungsstrategien zu finden.

Nacharbeit
Bausteinaufgaben können aber auch zur Nachbearbeitung der Inhalte, die den Schüler/innen besondere Schwierigkeiten bereitet haben, verwendet werden. In diesem Fall wird den Schüler/innen zuerst die Bauaufgabe präsentiert.

Die Schüler/innen bearbeiten zuerst die Bauaufgabe. Entstehen Schwierigkeiten, so kann die Lehrperson individuelle Hilfestellungen geben, indem sie die jeweiligen zur Problemstellung passenden Bausteine zum Bearbeiten gibt. Konnte das Problem in diesem begrenzten Kontext gelöst werden, kann der Übertrag auf die komplexere Bauaufgabe besser gelingen.

Bauaufgabe „Fußgängerzone“

Im Zuge der Stadtkernbelebung soll ein Teil der Fußgängerzone neu gestaltet werden. Es wird dazu ein Wettbewerb ausgeschrieben. Die junge Landschaftsarchitektin Lisa Himmelfrei reicht folgendes Projekt ein. Lisa Himmelfrei möchte einen Platz schaffen, an dem Menschen ausruhen, miteinander plaudern, wo Kinder im Wasser plantschen und Hunde ihren Durst stillen können.



Ihre Entwurfsskizze hat sie im Maßstab 1 : 200 in ein Koordinatensystem (1 Einheit = 1 cm) gestellt: An die Eckpunkte setzt sie jeweils einen anderen Baum:

Tanne (0/0)
Apfelbaum (0/10)
Nussbaum (−6/7)
Lärche (−5/−2)
Kirschbaum (0/−7)
Föhre (5/−1)
Marillenbaum (10/0)
Zwetschkenbaum (10/10)

Nur zwischen Apfel- und Nussbaum, Tanne und Lärche sowie Föhre und Marillenbaum wird ein kleiner Zaun mit jeweils einem Tor, dessen Breite 2 m beträgt, gesetzt. Alle anderen Begrenzungen werden mit verschiedenen Sträuchern bepflanzt. Damit dieser natürliche Zaun recht eng wird, plant Lisa für jeden Strauch einen halben Meter Pflanzbreite.

Das Herzstück dieser Erholungsoase ist der Wassergraben, der vom Apfelbaum zum Marillenbaum führt. Die Architektin wünscht sich einen Wassergraben, der zum Drüberspringen einlädt und in dem die Kinder relativ gefahrlos plantschen können. Der Wassergraben ist 25 cm tief und hat einen trapezförmigen Querschnitt, der oben 55 cm und unten 45 cm breit ist.

Der Bürgermeister schreibt Lisa folgenden Brief:

Liebe Frau Himmelfrei.
Ich bin von Ihrem Vorschlag sehr beeindruckt. Diese Gestaltung einer Fußgängerzone wäre ganz in meinem Sinne. Allerdings muss ich Sie darauf hinweisen, dass Kinder und Hunde gemeinsam in einem Park nicht erlaubt sind. Damit ich im Gemeinderatsausschuss Ihren Vorschlag gut vertreten kann, bräuchte ich noch folgende Informationen:

- Wie groß ist die Gesamtfläche dieser Grünanlage?
- Wie hoch sind die Kosten, wenn von der gemeindeeigenen Gärtnerei folgende Preise verrechnet werden (Erdanschüttung sowie Lohnkosten für die Arbeiter bleiben unberücksichtigt)?
  Baum: € 42,--
  Strauch: € 9,50
  Grassamen für 1 m^2 Wiese: € 0,15
  Zaun: € 8,30 pro Laufmeter
  Tor: € 32,90 pro Stück
- Wie viel Liter Wasser sind ungefähr notwendig, um den Wassergraben zu füllen?

Ich ersuche Sie um Beantwortung meiner Fragen.

Mit freundlichen Grüßen
Ihr Bürgermeister

Mögliche Lösungswege

Um einen Lösungsweg zu finden, müssen die Schüler/innen den Text bzw. das Beispiel strukturieren, die wichtigen Informationen herausfiltern und eine Strategie entwickeln. Außerdem gilt es zu überlegen, inwiefern das mathematische Modell der Realität entspricht. Die berechneten Größen sind dahingehend kritisch zu überprüfen und gegebenenfalls sind entsprechende Rundungen durchzuführen. Denn gerade die Angabe von sinnvollen Zahlenwerten stellt eine alltägliche Herausforderung dar.

- Einzeichnen der Gesamtfläche in ein Koordinatensystem
- Überlegung des Maßstabs. → Ermittlung der wahren Seitenlängen durch Berechnen mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes oder durch Längenmessung in der maßstabgetreuen Zeichnung
- Gesamtfläche: 680 m^2
  Ermittlung entweder durch Teilung in verschiedene Flächen und Addition dieser Flächeninhalte oder durch Ergänzung der Gesamtfläche auf ein Rechteck und anschließende Subtraktion der „Nicht-Parkflächen".
- Ermittlung der drei Zaunlängen durch Messen oder durch Berechnen mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes:
  Apfel – Nuss: $\sqrt{6^2 + 3^2} \rightarrow$ 13,42 m / Tanne – Lärche: $\sqrt{2^2 + 5^2} \rightarrow$ 10,77 m / Föhre – Marille: $\sqrt{1^2 + 5^2} \rightarrow$ 10,2 m, Addition dieser Längen und Subtraktion der dreifachen Torbreite liefert einen Näherungswert für die Gesamtlänge des Zaunes: 28,4 m. Dieser Wert stellt jedenfalls einen Maximalwert dar.

- Berechnung der Länge der Strauchreihen mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes: Nuss – Tanne: $\sqrt{6^2 + 7^2} \rightarrow$ 18,44 m / Lärche – Kirsch: $\sqrt{5^2 + 5^2} \rightarrow$ 14,14 m / Kirsch – Föhre: $\sqrt{5^2 + 6^2} \rightarrow$ 15,62 m / Marille – Zwetschke: 20 m / Zwetschke – Apfel: 20 m
- Kosten der Bäume: 8 · 42 → € 336,--
- Kosten der Sträucher: ungefähre Länge der Strauchreihen: 88,2 m → 2 Sträucher pro Meter → 176,4 Sträucher ≈ 176 · 9,50 → € 1 672,--. Bei dieser Berechnung bleibt unberücksichtigt, dass auch die an den Ecken gepflanzten Bäume Platz benötigen – d. h., dieser Wert stellt jedenfalls einen Maximalwert dar.
- Kosten für die Wiese: 680 · 0,15 → € 102,-- (ohne Berücksichtigung des Wassergrabens). Wird der Wassergraben jedoch berücksichtigt: Ungefähre Größe der Wasserfläche: 15,55 m² → 680 – 15,55 → 664,45 m², 664,45 · 0,15 → € 99,62 ≈ € 100,--
- Kosten für den Zaun: 28,4 · 8,30 → € 235,72 ≈ € 236,--
- Kosten für die Tore: 3 · 32,90 → € 98,70 ≈ € 99,--
- Gesamtkosten: rund € 2 443,--
- Volumen des prismenförmigen Wassergrabens: G (trapezförmige Querschnittsfläche des Grabens) = 0,125 m² → Länge des Grabens: rund 28 m (pythagoreischer Lehrsatz) → Volumen: rund 3,5 m³, daher sind maximal 3 500 Liter Wasser erforderlich. (Tatsächlich wird die Wassermenge geringer sein, weil der Wassergraben nicht vollständig gefüllt werden wird und zudem ein Abstand von den Bäumen einzuhalten ist.)

Lisas Antwortschreiben könnte lauten:

Lieber Herr Bürgermeister.

Die notwendige Gesamtfläche beträgt 680 m².

Wenn die nötige Erdanschüttung nicht verrechnet wird und auch die Gemeindearbeiter und Gärtner die Arbeiten während ihrer Dienstzeiten machen, daher nicht extra bezahlt werden müssen, betragen die Kosten rund € 2 443,--. Noch nicht dabei sind weiters der Beton bzw. die Steine für den Wassergraben sowie einige Parkbänke oder andere Sitzgelegenheiten.

Für die Füllung des Wassergrabens sind maximal 3 500 Liter Wasser nötig.

Ich hoffe, Ihnen mit dieser Aufstellung gedient zu haben, und freue mich über eine Zusage.

Mit freundlichen Grüßen
Lisa Himmelreich

Anbei finden Sie eine Liste der anfallenden Kosten:

Fläche der Wiese:	664,45 m²	€ 100,--
Bäume:	8 Stück	€ 336,--
Zaunlängen:	28,4 m	€ 236,--
Sträucher:	176 Stück	€ 1 672,--
3 Tore		€ 99,--
Gesamtausgaben		€ 2 443,--

Nicht berücksichtigt: Erdanschüttung, Gemeindearbeiter, Gärtner, Beton/Steine, Parkbänke

Kommentar

Dieses Beispiel vermittelt lebenspraktische Mathematik:

- Wettbewerbsausschreibungen sind üblich, wenn Neues geschaffen wird.
- Überlegungen einer Landschaftsarchitektin fließen mit ein.
- Forderungen eines Bürgermeisters sind zu berücksichtigen.

Auf diese Weise wir die Anwendbarkeit mathematischer Inhalte und Rechenverfahren im Alltag deutlich gemacht.

Das Beispiel „Fußgängerzone“ stellt besondere Herausforderungen im Hinblick auf vernetztes Denken und Nachhaltigkeit. Mathematische Inhalte, die schon längere Zeit zurückliegen, wie Berechnungen mit Hilfe maßstäblicher Darstellungen, Berechnungen an verschiedenen ebenen Figuren müssen ebenso beherrscht werden wie „jüngere“ Lehrstoffe wie z. B. Berechnungen mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes. Dadurch wird die Wichtigkeit der Nachhaltigkeit deutlich gemacht.

Durch die Textfülle in der Aufgabenformulierung wird zugleich auch die Lesekompetenz der Schüler/innen gefordert und gefördert. Eine starke Vernetzung mit Deutsch ist gegeben, weil einerseits Textverständnis zur Bearbeitung des Beispiels notwendig ist und andererseits eine Verbalisierung mathematischer Inhalte verlangt wird.

PLANUNG VON LÖSUNGSABLÄUFEN

Die hohe Komplexität des Beispiels erfordert verschiedenste Kompetenzen von den Schüler/innen. Um einen Lösungsweg zu finden, müssen die Schüler/innen den Text bzw. das Beispiel strukturieren, die wichtigen Informationen herausfiltern und eine Strategie entwickeln. Auch die Angemessenheit und Brauchbarkeit des mathematischen Modells im Hinblick auf die vorgegebene Problemstellung ist zu beurteilen. Bei den einzelnen Überlegungen und Berechnungen wird jeweils auf einen Standard fokussiert: beginnend mit dem Erfassen des gegebenen Sachverhaltes, der Erstellung eines Koordinatensystems usw.

Bei der Interpretation der mathematischen Lösung ergibt sich mehrfach die Gelegenheit, mit den Schüler/innen über sinnvolles Runden und Näherungswerte zu diskutieren. Auch auf die Erstellung eines Kostenvoranschlags kann gut eingegangen werden.

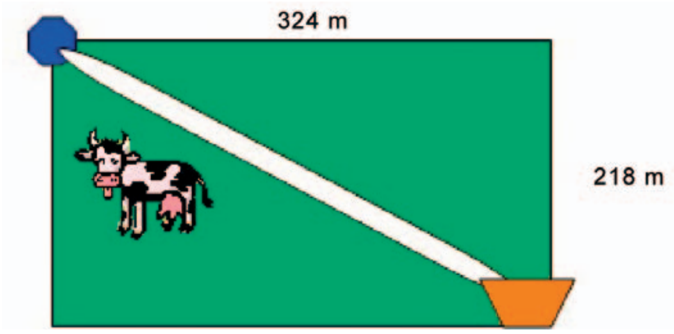
LEISTUNGSGRUPPEN-ÜBERGREIFENDES ARBEITEN

Dieses Beispiel eignet sich auch für eine Gruppenarbeit mit gemischten Leistungsniveaus. Es werden Gruppen gebildet, die aus Schüler/innen der 1., 2. und 3. Leistungsgruppe zusammengesetzt sind. Dadurch werden nicht nur mathematische Kompetenzen trainiert, sondern auch überfachliche wie kooperatives Handeln, aber auch kritisches Denken und Reflektieren.

Die sprachliche Anforderung dieses Beispiels liegt im mittleren Bereich. Es ist zwar relativ viel Text zu lesen, die Skizze erleichtert aber die Verständlichkeit und die verwendeten Wörter sind alltäglich. Lesekompetenz und Textverständnis sind Voraussetzungen zur selbstständigen Lösung des Beispiels, können aber mit Hilfestellung auch an Beispielen dieser Art geübt werden.

Baustein „Pytho 1“

Mit dem Wasser der Quelle, die sich an dem einen Eck der rechteckigen Kuhweide befindet, möchte Bäuerin Liesl den Wassertrog, der sich am gegenüberliegenden Eck befindet, speisen. Wie lange muss der Schlauch mindestens sein, damit Liesls Kühe aus dem Wassertrog trinken können?



Möglicher Lösungsweg

$324^2 + 218^2 = 152\,500 \rightarrow \sqrt{152\,500} \approx 390{,}51$

Der Schlauch bzw. die Leitung muss mindestens 391 m lang sein, da sonst das Wasser nicht bis in den Trog rinnt.

Überlegungen zur Aufgabenstellung

Klassifikation

Wesentliche Handlungsdimension

A1 Darstellen, Modellbilden: Ich kann einen gegebenen Sachverhalt erfassen und mathematische Beziehungen darin erkennen.

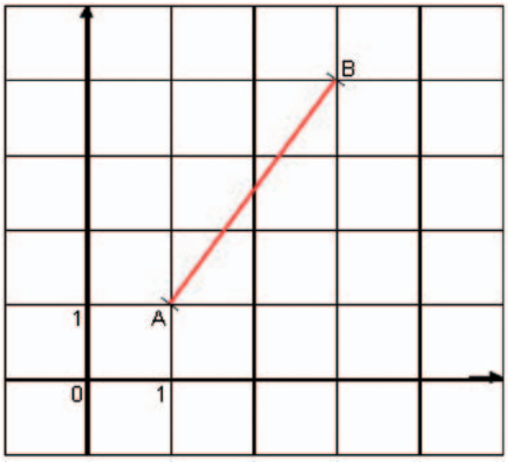
Wesentliche Inhaltsdimension

B3 Arbeiten mit Figuren und Körpern: Ich kenne den pythagoreischen Lehrsatz und kann ihn anwenden.

Kommentar

In Sachsituationen erkennen, dass eine Lösung mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes möglich ist, ist eine wichtige Sach- und Methodenkompetenz, insbesondere auch für Schüler/innen der 3. Leistungsgruppe.

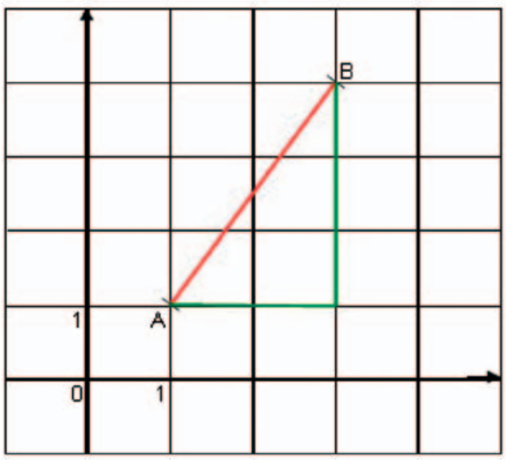
Baustein „Pytho 2“



In einem Koordinatensystem ist die Strecke AB gezeichnet.

Berechne die Länge der Strecke.

Möglicher Lösungsweg



$x^2 = 2^2 + 3^2$

$x = \sqrt{4 + 9}$

$x = 3{,}61$

Die Länge der Strecke beträgt 3,61 Einheiten.

Überlegungen zur Aufgabenstellung

Klassifikation

Wesentliche Handlungsdimension

A1 Darstellen, Modellbilden: Ich kann einen gegebenen Sachverhalt erfassen und mathematische Beziehungen darin erkennen.

Wesentliche Inhaltsdimension

B3 Arbeiten mit Figuren und Körpern: Ich kenne den pythagoreischen Lehrsatz und kann ihn anwenden.

Baustein „Pytho 3“

In einem Koordinatensystem ist eine Strecke durch die zwei Endpunkte X (3/2) und Y (−1/5) angegeben.

Berechne die Länge der Strecke.

Möglicher Lösungsweg

Die Länge der Strecke wird mit Hilfe eines rechtwinkeligen Dreiecks und des pythagoreischen Lehrsatzes ermittelt.
$3^2 + 4^2 = (\text{gesuchte Länge})^2$
$\sqrt{9 + 16} = 5 \leftarrow$ Länge der gesuchten Strecke

Überlegungen zur Aufgabenstellung

Klassifikation
Wesentliche Handlungsdimension
A1 Darstellen, Modellbilden: Ich kann Sachverhalte in verbaler, tabellarischer, grafischer und symbolischer Form darstellen.

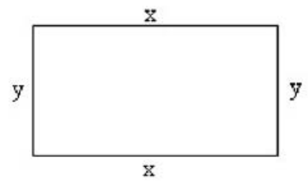
Wesentliche Inhaltsdimension
B3 Arbeiten mit Figuren und Körpern: Ich kenne den pythagoreischen Lehrsatz und kann ihn anwenden.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

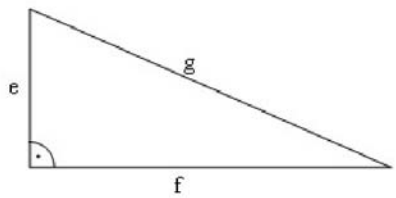
Baustein „Flächenformeln“

Erstelle zu den dargestellten Flächen eine Formelsammlung zur Berechnung ihrer Flächeninhalte und verwende dabei die angegebenen Benennungen.

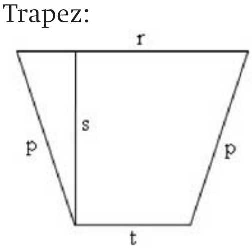
Rechteck:



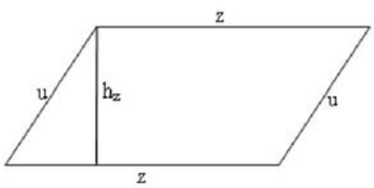
Dreieck:



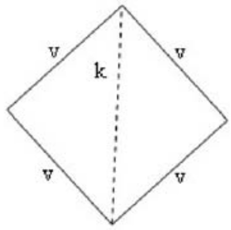
Trapez:



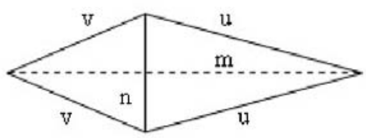
Parallelogramm:



Quadrat:



Deltoid:



Lösung

Figur	Flächeninhalt
Rechteck	$x \cdot y$
Dreieck	$\frac{e \cdot f}{2}$
Trapez	$\frac{(r + t) \cdot s}{2}$
Parallelogramm	$z \cdot h_z$
Quadrat	$v \cdot v$ oder v^2 oder $\frac{k^2}{2}$
Deltoid	$\frac{m \cdot n}{2}$

Überlegungen zur Aufgabenstellung

Klassifikation

Wesentliche Handlungsdimension

A4 Argumentieren und Begründen: Ich kenne mathematische Begriffe, Zusammenhänge (Sätze, Formeln) und Verfahren und kann sie erklären.

Wesentliche Inhaltsdimension

B3 Arbeiten mit Figuren und Körpern:Ich kann den Flächeninhalt und den Umfang einfacher ebener Figuren ermitteln.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

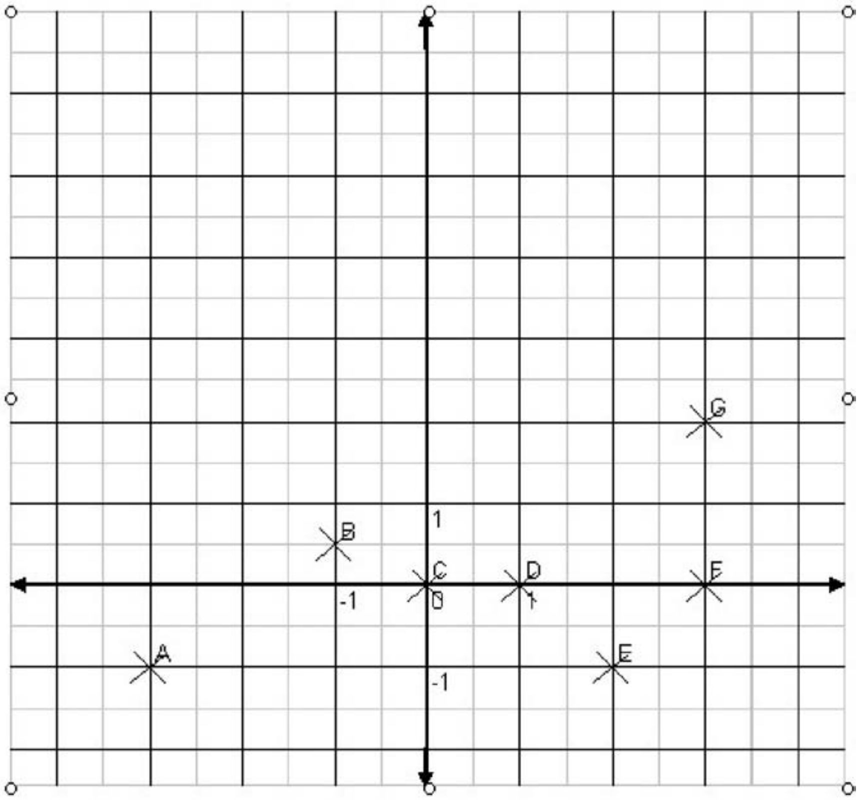
Baustein „Sternenhimmel“

Zeichne folgende Punkte in ein Koordinatensystem ein:

A (−3/−1), B (−1/0,5), C (0/0), D (1/0), E (2/−1), F (3/0), G (3/2)

Welches Sternbild kannst du annähernd erkennen?

Möglicher Lösungsweg



Man kann den großen Bären oder großen Wagen, das älteste Sternbild, das das ganze Jahr sichtbar ist, erkennen.

Überlegungen zur Aufgabenstellung

Klassifikation

Wesentliche Handlungsdimension

A2 Operieren, Rechnen: Ich kann Lösungen auch durch systematisches Probieren wie auch mit Hilfe von Tabellen oder grafischen Darstellungen finden.

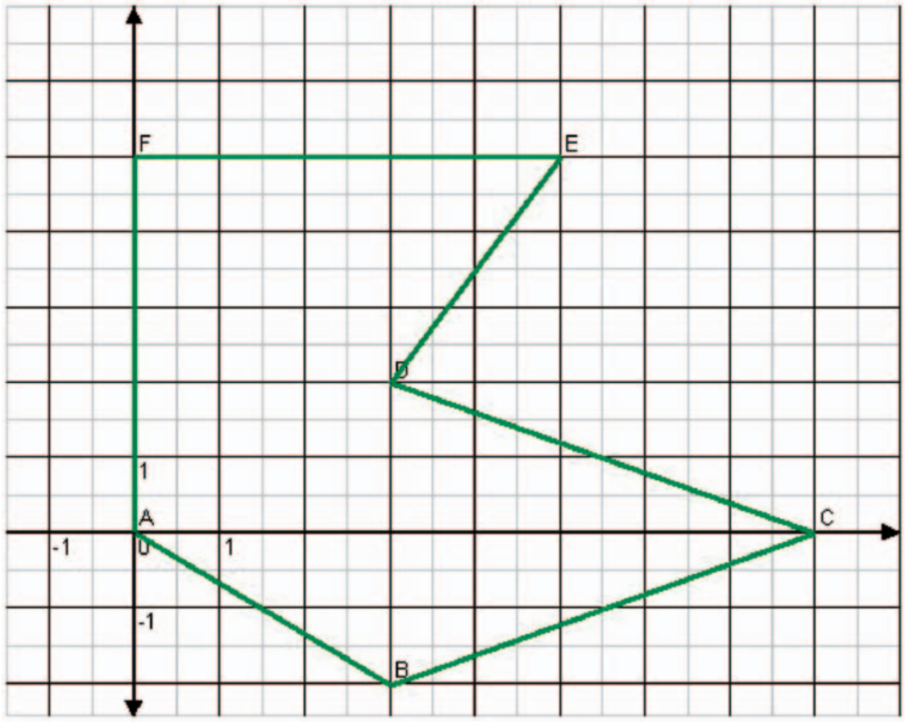
Wesentliche Inhaltsdimension

B3 Arbeiten mit Figuren und Körpern: Ich kann für einfache ebene Figuren bzw. einfache Körper Skizzen oder Zeichnungen erstellen (auch mit Hilfe des Koordinatensystems bzw. eventuell unter Verwendung von Grafikprogrammen).

aus: Exemplarische, beziehungsreiche Aufgaben, Februar 2006

Baustein „Transparent“

Für die „Modern Art of Deggendorf“-Ausstellung plant Julian, der gerne als Künstler sein Geld verdienen möchte, ein Transparent, das er zuerst bemalen und dann aufspannen möchte. Um eine Abschätzung für die benötigte Farbe durchführen zu können, hat er das Transparent in ein Koordinatensystem gezeichnet und seine Eckpunkte mit A, B, C, D, E und F bezeichnet:



Wie muss Julian vorgehen, um die Größe des Transparents zu bestimmen?

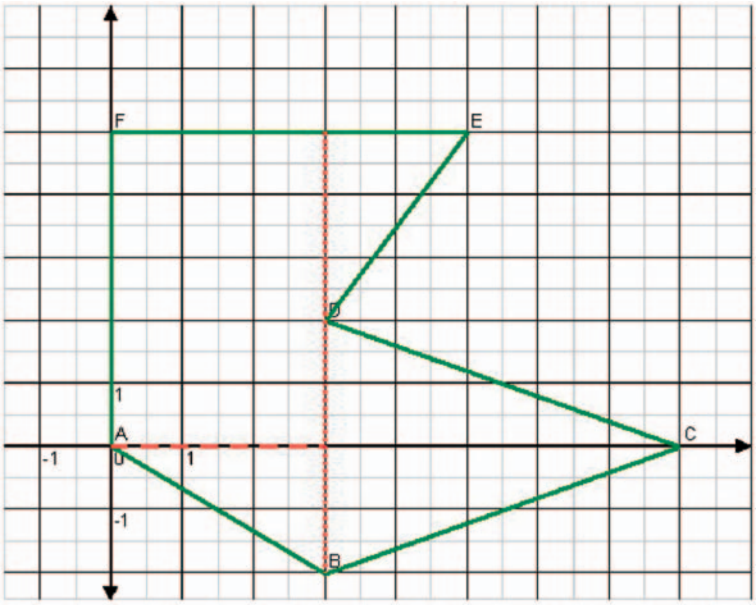
Finde einen Lösungsweg zur Ermittlung des Flächeninhaltes dieses unregelmäßigen Sechsecks und beschreibe dein Lösungsverfahren so, dass auch ein „Nicht-Mathematiker“ versteht, was du meinst.

Führe keine Berechnung durch.

Mögliche Lösungswege

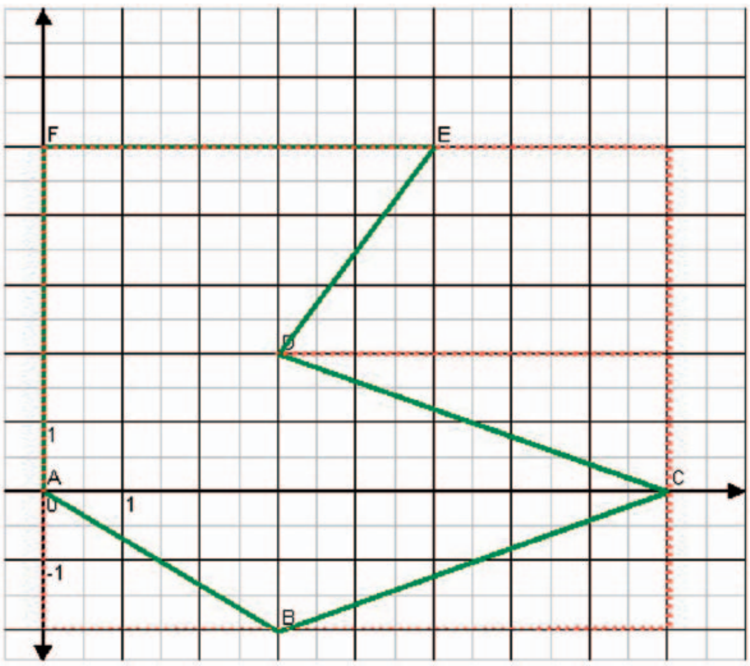
Lösungsweg 1

Zerlegen in einfache Flächen (Dreieck, Rechteck usw.) – Berechnen der einzelnen Flächeninhalte – Addition dieser Flächeninhalte



Lösungsweg 2

Ergänzen der Figur auf ein Rechteck – Berechnen des Rechteckflächeninhaltes sowie der ergänzten Flächen – Subtraktion der Ergänzungsflächeninhalte vom Rechteckflächeninhalt



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

Überlegungen zur Aufgabenstellung

Klassifikation

Wesentliche Handlungsdimension

A3 Interpretieren und Dokumentieren: Ich kann den Lösungsweg einer Aufgabe beschreiben.

Wesentliche Inhaltsdimension

B3 Arbeiten mit Figuren und Körpern: Ich kann den Flächeninhalt und den Umfang einfacher ebener Figuren ermitteln.

Kommentar

Die Ausformulierung bzw. Verbalisierung mathematischer Vorgänge wird im Regelmathematikunterricht sehr oft vernachlässigt. Solche und ähnliche Beispiele können zur Verwendung und Übung der mathematischen Fachsprache, zum „In-Worte-fassen“ mathematischer Überlegungen herangezogen und dadurch Begründen, Dokumentieren, Argumentieren und Interpretieren gefördert werden.

Gerade weil viele Schüler/innen mit dem Verbalisieren mathematischer Überlegungen Probleme haben, sollten solche Übungen verstärkt in den Unterricht einfließen.

Didaktische Hinweise:

- Da Schüler/innen der 3. LG in Mathematik oft auch in Deutsch in der 3. LG sind, könnte ein fächerübergreifendes Arbeiten für beide Gegenstände sehr hilfreich sein.
- Mathematik-Deutsch-Vokabelheft erstellen:

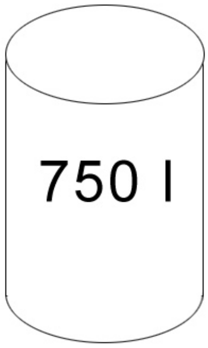
bemalen	Flächeninhalt berechnen
Flächeninhalt eines Rechtecks	$A = a \cdot b$

usw.

- Zuerst in Worte fassen, eine schriftliche Anleitung geben → Eine andere Gruppe muss das Geschriebene ausführen. → Kommt das gewünschte Ergebnis heraus?

Baustein „Hohl wird Raum“

Wie viel m³ Restmüll kann Fritz in diesem Container maximal unterbringen?



Möglicher Lösungsweg

750 l = 750 dm³ = 0,75 m³

Überlegungen zur Aufgabenstellung

Klassifikation

Wesentliche Handlungsdimension

A2 Operieren, Rechnen: Ich kann zwischen verschiedenen Darstellungen für Zahlen und Maße (z. B. Brüche und Dezimalzahlen, m² und ha, m³ und Liter) wechseln.

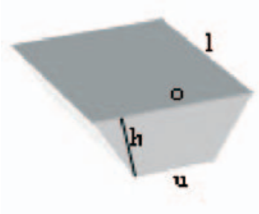
Wesentliche Inhaltsdimension

B1 Arbeiten mit Zahlen und Maßen: Ich kenne verschiedene Maßeinheiten und kann damit umgehen.

aus: Exemplarische, beziehungsreiche Aufgaben, Februar 2006

Baustein „Schafe füttern“

Wie viel Liter Futter passt in diesen Futtertrog?



Maße des Troges: unten 40 cm, oben 60 cm, Höhe 20 cm, Länge 1 m.

Möglicher Lösungsweg

Längenmaße auf gleiche Einheit bringen: 1 m = 100 cm oder falls die Überlegung schon getätigt wurde, dass dm^3 zur Umrechnung in Liter notwendig sind:
4 dm, 6 dm, 2 dm, 10 dm

Trapezfläche berechnen:
$A = \frac{(a + c) \cdot h}{2} \rightarrow A = \frac{(40 + 60) \cdot 20}{2} = 1\,000$ oder $A = \frac{(4 + 6) \cdot 2}{2} = 10$
Die Trapezfläche beträgt 1 000 cm^2 bzw. 10 dm^2.

Volumsberechnung: $V = G \cdot h \rightarrow V = 1\,000 \cdot 100 = 100\,000$ oder $V = 10 \cdot 10 = 100$
Das Volumen dieses Prismas beträgt 100 000 cm^3 bzw. 100 dm^3.

Umrechnung in Liter: 100 dm^3 = 100 l

Die richtige Antwort lautet: In den Trog passen 100 l Futter.

Überlegungen zur Aufgabenstellung

Klassifikation
Wesentliche Handlungsdimension
A1 Darstellen, Modellbilden: Ich kann einen gegebenen Sachverhalt erfassen und mathematische Beziehungen darin erkennen.

Wesentliche Inhaltsdimension
B3 Arbeiten mit Figuren und Körpern: Ich kann Oberflächeninhalte und Volumina einfacher Körper ermitteln.

Kommentar
Da das Berechnen des Volumens im Zusammenhang mit der Umrechnung in Hohlmaße in verschiedenen Lehrberufen vorkommt, erscheint es als notwendig, auch Schüler/innen der 3. Leistungsgruppe diese Vernetzung zuzumuten.

Baustein „Runden“

Wurden die verschiedenen Zahlen auf die angegebenen Stellenwerte bzw. Maßeinheiten richtig gerundet?

Kreuze an: R für richtig und F für falsch.

Zahl/Größe	Runde auf den angegebenen Stellenwert (Maßeinheit)	Gerundete Zahl/ Gerundete Größe	R	F
2,067	Zehntel	2,1		
4 568 921	Hunderttausender	4 600 921		
5,23 m	Meter	5 m		
410,89	Einer	410		
8 237 g	Kilogramm	8 kg		
3,40091 t	Kilogramm	3 401 kg		
981 002	Hunderttausender	900 000		
7 345 cm^2	dm^2	73 dm^2		
4,0092 m^3	Liter	4 009 l		
212,51	Einer	213		
6 453,497 €	ganze €	6 454 €		

Lösung

R – F – R – F – R – R – F – R – R – R – F

Überlegungen zur Aufgabenstellung

Klassifikation
Wesentliche Handlungsdimension
A2 Operieren, Rechnen: Ich kann Ergebnisse abschätzen oder auch überprüfen, mit Näherungswerten rechnen und sinnvoll runden.

Wesentliche Inhaltsdimension
B1 Arbeiten mit Zahlen und Maßen: Ich kenne die Darstellung von Zahlen als Dezimalzahlen, Bruchzahlen, Potenzen und Wurzeln und kann mit Zahlen in diesen Darstellungen arbeiten.

Kommentar
Runden gehört zu den mathematischen Grundfertigkeiten und sollte daher immer wieder wiederholt werden. Auch Schüler/innen der 3. Leistungsgruppe müssen diese Fähigkeit beherrschen, nicht nur mit einfachen Zahlen und in benachbarte Einheiten. Sie sollen sich auch der Herausforderung stellen, komplexere Aufgaben zu lösen. Da sie ein Ergebnis vorgegeben haben, über dessen Richtigkeit sie entscheiden müssen, wird ein Denkschritt vorweggenommen.

Baustein „Zwei Grundstücke“

Welches der beiden rechteckigen Grundstücke ist in Wirklichkeit größer?

Grundstück	Maßstab	Länge	Breite
A	1 : 500	6 cm	4 cm
B	1 : 250	12 cm	8 cm

Begründe deine Antwort.

Mögliche Lösungswege

Beide Grundstücke sind gleich groß.

Lösungsweg 1
Wahre Länge und Breite berechnen und dann den Flächeninhalt:
30 m lang und 20 m breit, Flächeninhalt von 600 m^2

Lösungsweg 2
Berechnung des Flächeninhaltes der im Maßstab angegebenen Rechtecke ($24\ cm^2 = 0{,}0024\ m^2$ bzw. $96\ cm^2 = 0{,}0096\ m^2$) und anschließende Multiplikation mit 500^2 bzw. 250^2

Lösungsweg 3
Sprachliche Formulierung im Sinne von: Da der Maßstab 1 : 250 die Hälfte (: 2) vom Maßstab 1 : 500 ist, die Maße der Längen aber doppelt so lang sind (· 2), sich daher indirekt proportional verhalten, ist der Flächeninhalt der beiden Grundstücke gleich.

Lösungsweg 1 und 3 könnten am Ende der 5. Schulstufe realisiert werden, Lösungsweg 2 erfordert höhere Abstraktion, daher wird dieser Lösungsweg erst in höheren Schulstufen möglich sein.

Überlegungen zur Aufgabenstellung

Klassifikation
Wesentliche Handlungsdimension
A4 Argumentieren und Begründen: Ich kann meine Entscheidung für die Verwendung eines bestimmten mathematischen Modells bzw. eines bestimmten Lösungsweges, für eine bestimmt Darstellung oder auch für die Auswahl einer bestimmten Lösung begründen.

Wesentliche Inhaltsdimension
B1 Arbeiten mit Zahlen und Maßen: Ich kenne verschiedene Maßeinheiten und kann damit umgehen.

Kommentar

Gerade bei Berechnungen mit dem Maßstab ergeben falsche Lösungen gute Grundlagen für mathematische Diskussionen. Greifen Sie diese Momente auf und fordern Sie die Schüler/innen auf zu argumentieren, wie sie zu ihrem Ergebnis gekommen sind.

Es ist für die Schüler/innen motivierender, wenn Sie als Lehrer/in nicht gleich eine Bewertung ihrer Ergebnisse (richtig oder falsch) abgeben. Selbst bei einem „Leider falsch!" sinkt die Bereitschaft auf eine Erklärung der Vorgangsweise, weil „es ja ohnehin falsch ist". Durch die Präsentation ihrer Arbeitsweise und die Darstellung ihrer Überlegungen haben die Schüler/innen die Möglichkeit, ihre Gedankensprünge nachzuvollziehen und gegebenenfalls auch selbst das Problem bzw. die Fehler zu erkennen und zu verändern. Fragen Sie also häufig: „Wie hast du das herausgefunden?", denn Lernen ist ein aktiv-konstruktiver Prozess, der in den Schüler/innen ablaufen soll (*vgl. BOROWSKI, Harald: Lernschwierigkeiten als Chance begegnen. In: Praxis Schule 5 – 10, Heft 4/2005. Westermann, Braunschweig 2005*).

ERPROBTE UND ÜBERARBEITETE AUFGABEN

Die folgenden beiden Aufgaben stehen stellvertretend für Erprobungsbeispiele, die im Schuljahr 2004/05 evaluiert wurden (siehe „Bildungsstandards für Mathematik am Ende der 8. Schulstufe. Version 3.0, Oktober 2004“). Aus den Rückmeldungen, etwa über die Anzahl der richtigen Lösungen, über Unklarheiten bei der Aufgabenstellung und aus Vorschlägen zur Verbesserung entstanden überarbeitete Aufgaben, die wieder in den Pool einfließen.

Wie bei allen Aufgaben der Version 3.0 steht vorgeschaltet eine Übersicht über die geforderten Kompetenzen, Komplexität, Niveau, sprachliche Anforderungen und Hilfsmittel. Ein kurzer Kommentar informiert über die Rückmeldungen und die dadurch erfolgte Weiterentwicklung der Aufgabe.

Ein weiteres, sehr ausführlich dokumentiertes Beispiel („Nimm 4, zahl 3!“) findet sich auf www.gemeinsamlernen.at im „Zwischenbericht zur Pilotphase II“ unter dem Titel „Wie Rückmeldungen in unsere Arbeit einfließen“ (Menü „Qualität & Kompetenzen & Standards“).

Auch auf die Aufgabe „Ein toller Vorteilskoffer“ sei hingewiesen (siehe Seite 17).

ZUSCHLÄGE UND RABATTE

Zuschläge und Rabatte

Ab der 6. Schulstufe	Arbeiten mit Zahlen und Maßen

Klassifikation:

A Wesentliche Handlungsdimension

A4 Argumentieren und Begründen:
Ich kann meine Entscheidung für die Verwendung eines bestimmten mathematischen Modells bzw. eines bestimmten Lösungsweges, für eine bestimmte Darstellung oder auch für die Auswahl einer bestimmten Lösung begründen.

B Wesentliche Inhaltsdimension

B1 Arbeiten mit Zahlen und Maßen:
Ich kenne die Begriffe „Prozent“ und „Zinsen“ und kann damit verständig umgehen.

Komplexität			Leistungsniveau Wer soll die Anforderung v. a. erfüllen?			Hilfsmittel			Sprachliche Anforderung		
gering	mittel	hoch	alle	AHS, 1. u. 2. LG	1. LG u. AHS	keine	übliche (z. B. TR)	extra (Netz o. Ä.)	gering	mittel	hoch
	√			√			√			√	

Kommentierung

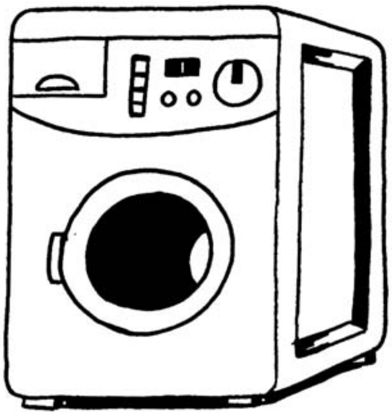
Überarbeitung des Beispiels „Zuschläge und Rabatte (Variante A)“ aus Version 3.0, S. 96. Das Beispiel der Version 3.0 wurde im November 2004 von den Lehrer/innen an den Pilotschulen erprobt und die Ergebnisse wurden der Beispielgruppe A/B rückgemeldet. Dabei ergaben sich die folgenden prozentuellen Lösungshäufigkeiten in den einzelnen Schultypen und Leistungsgruppen:

	vollständig gelöst	teilweise gelöst	nicht gelöst	Gesamtzahl
AHS *	33 %	25 %	42 %	2 805
LG 1	40 %	24 %	36 %	1 181
LG 2	18 %	30 %	52 %	1 325
LG 3	7 %	20 %	73 %	647

* Anmerkung: Im Gegensatz zu den HS lag dem Großteil der AHS-Schüler/innen eine Aufgabenstellung ohne konkreten Preis für die Ware vor.

Auf Grund der äußerst niedrigen Trefferquote und resultierend aus den vielen Meldungen der Pilotschullehrer/innen, dass dieses Beispiel für die 3. LG zu schwierig ist, ergab sich die Änderung des Niveaus. Trotzdem ist zu vermerken, dass diese und ähnliche Problemstellungen auch für Schüler/innen der 3. LG wichtige Anknüpfungspunkte für Mathematik im Alltag darstellen und Aufgaben solcher Art auch von diesen Schüler/innen bearbeitet werden sollten.

Du willst eine Waschmaschine im Wert von 1 000 € kaufen. Sie muss von der Firma zugestellt werden.



Du hast die Möglichkeit, zwischen den Angeboten dreier Firmen zu wählen.

Firma A:
Wir verrechnen zuerst einen Transportzuschlag von 10 % des Warenpreises und ziehen dann vom Gesamtbetrag einen Rabatt von 20 % ab.

Firma B:
Wir verrechnen keinen Transportzuschlag und gewähren auf den Warenpreis einen Rabatt von 10 %.

Firma C:
Wir ziehen zuerst vom Warenpreis einen Rabatt von 20 % ab und verrechnen dann einen Transportzuschlag von 10 % dieses verringerten Betrages.

Du möchtest die Waschmaschine zu einem möglichst günstigen Preis beziehen. Für welches Angebot (Firma) würdest du dich entscheiden? Begründe deine Entscheidung.

Möglicher Lösungsweg

Die Schüler/innen führen für jede Firma die entsprechenden Berechnungen durch.

Firma A	Firma B	Firma C
1 000 · 1,1 = 1 100		1 000 · 0,8 = 800
1 000 · 0,8 = 880	1 000 · 0,9 = 900	800 · 1,1 = 880
Gesamtkosten: 880 €	Gesamtkosten: 900 €	Gesamtkosten: 880 €

Bei den Firmen A und C bezahlt man jeweils 880 €, bei Firma B 900 €.
Daher wird man Firma A oder C wählen, weil Firma B teurer ist.

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13

Überlegungen zur überarbeiteten Aufgabenstellung

Auf Grund von Rückmeldungen, dass man selten eine Ware im Wert von 100 € nicht selber transportieren kann und die Schüler/innen eher darüber diskutierten, was denn nur 100 € kostet, aber so schwer ist, dass man ein Transportunternehmen braucht, wurde nun in der Aufgabenstellung ein konkreter Fall dargestellt – der Kauf und Transport einer Waschmaschine.

Aufgabenstellung in der Version 3.0

Zuschläge und Rabatte

Du willst eine Ware im Wert von 100 €, die zugestellt werden muss, kaufen. Du hast die Möglichkeit, zwischen den Angeboten dreier Firmen zu wählen.

- Firma A: Wir verrechnen zuerst einen Transportzuschlag von 10 % des Warenpreises und ziehen vom Gesamtbetrag einen Rabatt von 20 % ab.
- Firma B: Wir ziehen zuerst vom Warenpreis einen Rabatt von 20 % ab und verrechnen dann einen Transportzuschlag von 10 % dieses verringerten Betrages.
- Firma C: Wir verrechnen keinen Transportzuschlag und gewähren auf den Warenpreis einen Rabatt von 10 %.

Du möchtest die Ware zu einem möglichst günstigen Preis beziehen. Für welches Angebot (welche Firma) würdest du dich entscheiden? Begründe deine Entscheidung.

„Reduzierte Lebensnähe“

Beispiele dieser Art („Bausteinaufgaben“) bereiten die Schüler/innen auf Fragestellungen vor, mit denen sie im Alltag häufig konfrontiert sein werden – Lieferung einer Ware, die zu schwer oder zu sperrig ist, Transport bei einem Wohnungswechsel o. Ä. Die Auseinandersetzung mit verschiedenen Angeboten ist eine beinahe alltägliche Herausforderung.

Das Beispiel entspricht daher durchaus dem Anspruch der Lebensnähe, wenn auch sehr reduziert in der Aufgabenstellung (einfache Zahlen, einfache Formulierung des Textes). Allerdings ist es sehr gut geeignet bzw. auch notwendig, um Schüler/innen jenes Methodenrepertoire zu geben, das sie benötigen, um sich mit der realen Fassung solcher Aufgaben („Bauaufgabe“) auseinander zu setzen. Dies sollte im Anschluss an die Bearbeitung solcher „reduzierter“ Beispiele in jedem Fall stattfinden.

Durch das kritische Hinterfragen der Angebote bzw. das Berechnen des Transportzuschlages bzw. des Rabatts üben die Schüler/innen das genaue und kritische Lesen von Angeboten. Erklärungen zu „Transportzuschlag“ bzw. „Rabatt“ werden notwendig sein.

Lügner

Ab der 7. Schulstufe	Arbeiten mit Variablen

Klassifikation:

A Wesentliche Handlungsdimension

A1 Darstellen, Modellbilden:
Ich kann mich für ein geeignetes (arithmetisches, algebraisches, tabellarisches, grafisches, geometrisches) Modell bzw. für einen geeigneten Lösungsweg zur Bearbeitung eines Problems entscheiden und Lösungsabläufe planen.

A2 Operieren, Rechnen:
Ich kann Terme und Gleichungen (Formeln) umformen, in Terme und Gleichungen (Formeln) richtig einsetzen und Werte berechnen.

A4 Argumentieren und Begründen:
Ich kann meine Entscheidung für die Verwendung eines bestimmten mathematischen Modells bzw. eines bestimmten Lösungsweges, für eine bestimmte Darstellung oder auch für die Auswahl einer bestimmten Lösung begründen.

B Wesentliche Inhaltsdimension

B2 Arbeiten mit Variablen und funktionalen Abhängigkeiten:
Ich kann Variable einsetzen und sinnvoll mit ihnen arbeiten.

Komplexität			Leistungsniveau Wer soll die Anforderung v. a. erfüllen?			Hilfsmittel			Sprachliche Anforderung		
gering	mittel	hoch	alle	AHS, 1. u. 2. LG	1. LG u. AHS	keine	übliche (z. B. TR)	extra (Netz o. Ä.)	gering	mittel	hoch
✓			✓			✓				✓	

Kommentierung

Überarbeitung des Beispiels „Lügner (Variante A)“ aus Version 3.0.
Das Beispiel der Version 3.0 wurde im Jänner 2005 von den Lehrer/innen an den Pilotschulen erprobt und die Ergebnisse wurden der Beispielgruppe A/B rückgemeldet.

Dabei ergaben die die folgenden prozentuellen Lösungshäufigkeiten in den einzelnen Schultypen und Leistungsgruppen.

Schultyp	vollständig gelöst	teilweise gelöst	nicht gelöst	Gesamtzahl
AHS *	63 %	35 %	2 %	2 616
LG 1	71 %	13 %	16 %	1 058
LG 2	51 %	28 %	21 %	1 224
LG 3	31 %	23 %	46 %	668

Weitere Hinweise der Lehrer/innen an den Pilotschulen führten zur Überarbeitung des Beispiels.

Martin behauptet, dass $x = 3$ Lösung der folgenden Gleichung ist:

$3x + 10 = 31$

Vervollständige den zutreffenden Satz:

A: Martins Behauptung ist richtig, weil ...
B: Martins Behauptung ist falsch, weil ...

Mögliche Lösungswege

Bei der bewussten oder unbewussten Auswahl der Lösungsstrategie erfüllen die Schüler/innen eine wesentliche Handlungsdimension.

SUNIS & COSINA

Ich kann mich für ein geeignetes (arithmetisches, algebraisches, tabellarisches, grafisches, geometrisches) Modell bzw. für einen geeigneten Lösungsweg zur Bearbeitung eines Problems entscheiden und Lösungsabläufe planen.

Möglichkeit 1
Die Schüler/innen lösen die Gleichung mit Hilfe von Äquivalenzumformungen:

$$\begin{aligned} 3x + 10 &= 31 \\ 3x &= 21 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

SUNIS & COSINA

Ich kann Terme und Gleichungen (Formeln) umformen, in Terme und Gleichungen (Formeln) richtig einsetzen und Werte berechnen.

Martin hat nicht Recht. Die richtige Lösung ist $x = 7$, daher ist seine Behauptung falsch.

SUNIS & COSINA

Ich kann die Korrektheit mathematischer Darstellungen und Lösungswege einschätzen und Fehler erkennen.

Möglichkeit 2
Die Schüler/innen überprüfen, ob die Gleichung eine wahre Aussage liefert, wenn man die Variable durch die Zahl 3 ersetzt.

$$3x + 10 = 31$$
$$3 \cdot 3 + 10 = 31$$
$$19 = 31$$

Martin hat nicht Recht. Die Aussage 19 = 31 ist falsch. Daher ist $x = 3$ keine Lösung der Gleichung.

Mögliche richtige Antworten
B: Martins Behauptung ist falsch, weil …

- „Wenn man die Gleichung auflöst, kommt für $x = 7$ heraus und nicht $x = 3$."
- „Wenn man für $x = 3$ einsetzt, dann stimmt die Gleichung nicht, weil auf jeder Seite was anderes herauskommt."
- „3 mal 3 plus 10 ergibt 19 und nicht 31."

Überlegungen zur überarbeiteten Aufgabenstellung

Erst durch das verbale Beantworten der Fragestellung werden Argumentieren und Begründen durchgeführt, das alleinige Lösen der Gleichung ist noch keine Handlung in dieser Dimension. In der Regel wurde aber die Gleichung mit Hilfe von Äquivalenzumformungen gelöst und diese Lösung „unkommentiert" als Begründung hingeschrieben. Um dies zu vermeiden, wurde die Aufgabenstellung geändert.

Aufgabenstellung in der Version 3.0

Lügner?

Martin behauptet, dass $x = 3$ Lösung der folgenden Gleichung ist:

$$3x + 10 = 31$$

Zeige, dass seine Behauptung falsch ist.

Hinweis zur Korrektur: Die Aufgabe gilt als „teilweise richtig", wenn die Lösung $x = 7$ berechnet wurde, aber eine entsprechende Begründung fehlt.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

WORKSHOP „BILDUNGSSTANDARDS FÜR MATHEMATIK AM ENDE DER 8. SCHULSTUFE“

Der Workshop „Bildungsstandards für Mathematik am Ende der 8. Schulstufe“ wurde von MinRat Mag. Richard Stockhammer in seiner Verantwortung für die Bildungsstandards Mathematik, 8. Schulstufe im Rahmen des Gesamtprojekts „Bildungsstandards in Österreich“ (koordiniert von SC Dr. Anton Dobart und LSI Mag. Josef Lucyshyn) im Jahr 2003 ins Leben gerufen. Geplant war, eine Arbeitsgruppe aus den Vertreter/innen der Pilotschulen zu installieren. Mittlerweile besteht sie sowohl aus aktiven Mathematiklehrer/innen aller Bundesländer aus dem AHS- und HS-Bereich als auch aus Fachdidaktiker/innen, Empiriker/innen und Fachkoordinator/innen in den Bundesländern.

Mitwirkende

Mag. Elfriede Alber, Univ.-Prof. Dr. Ferdinand Eder, Dr. Christine Fischer, Prof. Mag. Gertraud Frerichs, Mag. Elisabeth Fuchs, Mag. Sieglinde Fürst, HOL Monika Haas, SR Ewald Hodics, Prof. Mag. Heiner Juen, Prof. Mag. Beate Kröpfl, HOL Elisabeth Langwallner, HD Sonja Machala, HOL Charlotte Macsemniuc, OStR Mag. Angela Mortsch, Mag. Rudolf Muckenhuber, Mag. Elisabeth Mürwald, Mag. Hans Christian Neureiter, Mag. Helma Ochnitzberger, Univ.-Prof. Dr. Karl Josef Parisot, Mag. Christa Preis, Mag. Berthold Reiter, Eduard Schlaffer, Anna Schwendinger, BSI Manfred Wimmer

Arbeitsschwerpunkte

1. Entwicklung des Konzepts der Bildungsstandards vor allem über Aufgaben mit
- Bezug zur Lebenswelt der Schüler/innen
- Bezug zur Lehr- und Lernumgebung
- Bezug zu externen Informationsquellen
- Bezug zu anderen Fächern
- Bezug zu überfachlichen Kompetenzen
- Bezug zum Lehrplan
- Bezug zum Kompetenzmodell

2. Erprobung und Reflexion von Beispielen in Zusammenarbeit mit den Pilotschulen:
- Weiterentwicklung des Standardkonzeptes
- Reflexion aufgrund der Rückmeldungen aus den Pilotschulen
- Konsens stiften
- Vernetzung betreiben
- Anregung zur Unterrichtsentwicklung und Qualitätssteigerung geben
- Vorschläge für Einführungsreferate zu den Standards
- Fortbildung für Kolleg/innen zur praktischen Umsetzung der Standards anbieten
- Referententätigkeit (Bildungsstandards für Mathematik, Diagnoseinstrument MATKOMP, praktische Umsetzung der Kompetenzen im Unterricht)

Zur Erfüllung dieser Aufgaben werden wechselnde Projektgruppen gebildet. Die derzeit aktiven Projektgruppen werden auf den folgenden Seiten vorgestellt.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

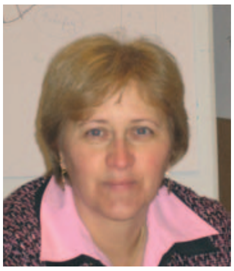
PROJEKTGRUPPEN

Arbeitsgruppe Aufgabenerstellung
AB: Schwerpunkt Handlungs- und Inhaltsdimensionen

Leitung:

Mag. Christa Preis

Mitarbeit:



Sonja Machala

Mag. Elisabeth Mürwald

Mag. Hans Christian Neureiter

Arbeitsbereich:

- Entwicklung von Aufgabenbeispielen für den Schwerpunkt Handlungs- und Inhaltsdimensionen für die verschiedenen Leistungsniveaus
- Aufzeigen der unterschiedlichen Bezüge, die durch die Aufgabenbeispiele hergestellt werden können
- Darstellung verschiedener Lösungswege, die bei der Bearbeitung der Aufgabenbeispiele genutzt werden können
- Einholen und Auswerten von kommentierten Schüler/innenlösungen, die mögliche Bezüge und Lösungswege deutlich werden lassen
- Entwicklung von Variationen zu einzelnen Aufgabenbeispielen
- Überarbeitung und Weiterentwicklung der Aufgabenbeispiele auf Grund der Rückmeldungen der Lehrer/innen an den Pilotschulen

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13

Arbeitsgruppe Aufgabenerstellung C: Schwerpunkt Überfachliche Kompetenzen

Leitung: Mitarbeit:

Mag. Heiner Juen

Mag. Elfriede Alber

Mag. Dr. Christine Fischer

Arbeitsbereich:
Unter dem Arbeitstitel „Beitrag der Mathematik zu den fächerübergreifenden Kompetenzen“ erstellt die Gruppe Aufgaben, die einen Beitrag zur Lebenskompetenz der Schüler/innen leisten sollen. An Beispielen wird gezeigt, dass sich durch die Verwendung unterschiedlicher Lernformen und durch Formulierung entsprechender Arbeitsaufträge relativ leicht Aufgaben entwickeln lassen, die diesem Anspruch gerecht werden. Mathematik wird auf diese Art und Weise so gelernt, dass die Kompetenzen bei Schüler/innen nachhaltig gesichert sind. Um die Implementierung fächerübergreifender Kompetenzen im Unterricht gewährleisten zu können, beschäftigt sich die Gruppe mit folgenden

Zielsetzungen:
- Aufgaben mit dem Schwerpunkt „fächerübergreifende Kompetenzen“ werden entwickelt.
- Handreichungen für verschiedene Unterrichtsformen werden erstellt.
- Begeisterung für einen Unterricht mit offenen Fragestellungen wird bei Lehrer/innen angeregt.
- Fortbildungen mit dem Schwerpunkt „Selbstverantwortliches Lernen“ und „fächerübergreifende Kompetenzen im Mathematikunterricht“ werden konzipiert und angeboten.
- Ideen von Lehrerinnen und Lehrern zum Thema „Lebenskompetenz“ werden aufgegriffen und diese Ideen weiter verbreitet.

aus: Exemplarische, beziehungsreiche Aufgaben, Februar 2006

Qualitätssicherung

Leitung: Mitarbeit:


Anna Schwendinger


Mag. Beate Kröpfl


Mag. Angela Mortsch


Mag. Helma Ochnitzberger

Arbeitsbereich:

- Sammlung, Sichtung und Korrektur der Aufgaben
- Herstellung von Broschüren und Unterlagen für Pilotschulen
- Organisation und Sammlung von Rückmeldungen
- Koordination der Projektgruppen

Information und Vernetzung

Leitung: Mitarbeit:


Mag. Elfriede Alber


Mag. Beate Kröpfl


Mag. Angela Mortsch


Mag. Hans Christian Neureiter

Arbeitsbereich:

- die Kommunikation (den Austausch) innerhalb der einzelnen Subgruppen begleiten
- Arbeitsprozesse und Ergebnisse dokumentieren
- Informationen für die Öffentlichkeit aufbereiten und zugänglich machen
- Reaktionen und Anregungen von außen aufnehmen und an die einzelnen Projektgruppen weiterleiten

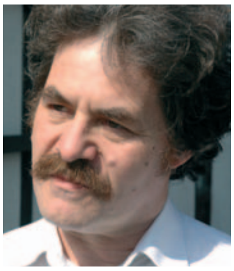
Im Vordergrund steht die Dokumentation der Projektphilosophie, aber auch die Pflege des Informationsflusses zu und von den Pilotschulen.

Netzwerk MATKOMP

Leitung: Mitarbeit:


Mag. Helma Ochnitzberger


Mag. Elfriede Alber


Univ. Prof. Dr. Ferdinand Eder


Mag. Dr. Brigitte Makl-Freund

Zielsetzung:
Implementierung der Selbstevaluation mit MATKOMP in das Unterrichtskonzept

MATKOMP ist ein international und national standardisiertes Diagnoseinstrument, das durch seine theoretischen Grundlagen in der Nähe der Bildungsstandards angesiedelt ist. Der Test liefert ein Kompetenzprofil für einzelne Schülerinnen und Schüler, aus dem Stärken und Schwächen ablesbar sind. Das Verfahren lässt aber auch Rückschlüsse auf Unterrichtsergebnisse von Schülergruppen zu und kann somit zur Evaluierung von Unterricht hilfreich eingesetzt werden. Auf Grund dieser Selbstevaluation kann MATKOMP Bodenbereiter und Eisbrecher für Standards sein. Es ist aber keinesfalls ein Diagnoseinstrument, das die Auseinandersetzung mit den Standards ersetzen soll.

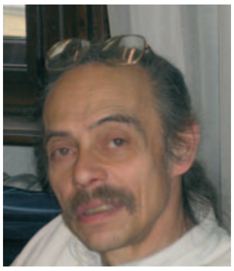
Lehrer/innen verschiedener Schultypen aus ganz Österreich zeigen großes Interesse an der Selbstevaluation ihres Mathematikunterrichts mit MATKOMP. Es besteht bereits ein informelles Netzwerk, das nahezu ganz Österreich umfasst.

Ziel des Projekts ist ein unterrichtsnaher Einsatz, um eine Möglichkeit und eine Basis für Unterrichtsentwicklung zu schaffen. Durch gezielte Fortbildung und aufeinander abgestimmte Fortbildungskonzepte sowie Evaluation und Kontaktpflege zu interessierten Lehrer/innen soll die gesamte Entwicklung des Instruments und des Einsatzes präsent und transparent gemacht werden.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

Auf die Volksschule aufbauen

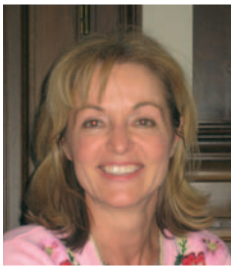
Leitung:



Univ. Prof. Dr. Karl Josef Parisot

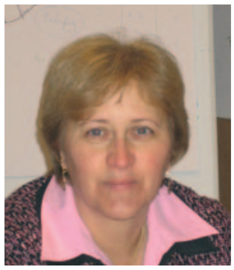
Mitarbeit:

Mag. Elfriede Alber



Mag. Silvia Degenhart

Mag. Maria Fast



Sonja Machala

Charlotte Macsemniuc

Mag. Elisabeth Mürwald

Heidi Scheidl

Dr. Maria Schwarz-Herda

Arbeitsbereich:

- Aufzeigen der lehrplanmäßigen Voraussetzungen aus der Volksschule
- Sichtung der VS-Lehrgänge in ihrem Anbot als potenzielle Umsetzung des Lehrplans
- Vergleiche mit Bezeichnungen und Begriffen in der Sekundarstufe
- Erstellen von Hinweisen auf Unstimmigkeiten
- Entwickeln von Material zum Abbau von Defiziten

Die Lehrpläne der Sekundarstufe I verweisen auf das in der Grundschule Erworbene als Basis für die Weiterentwicklung. Die Erwartungen der Lehrer/innen erweisen sich in vielen Bereichen als zu weit (insbesondere im formalen schriftlichen Rechnen), anderes in der Volksschule bereits Erlerntes wird hingegen als für die AHS und Hauptschule vollkommen Neues gesehen. Das Untersuchen der bedeutendsten Schulbücher für die Volksschule soll hier auf mögliches potenzielles Können und Wissen der Schüler/innen aufmerksam machen, um die Verbindung zwischen den Schulformen kontinuierlicher – vor allem beim Einstieg – gestalten zu können. Umlernen ist schon schwierig genug, bewusst gemachtes Umlernen jedoch leichter.

Basismathematik im Lebensalltag

Leitung: Mitarbeit:


Mag. Elisabeth Mürwald


Monika Haas


Mag. Helma Ochnitzberger


Martina Teichmann

Arbeitsbereich:
Erarbeitung von Grundkompetenzen bzw. der notwendigen Anforderungen an das niedrigste Leistungsniveau in der Hauptschule für einen positiven Hauptschulabschluss

- auf der Grundlage von verbalen Definitionen von Bildungsstandardsniveaus,
- dargestellt an entsprechenden Aufgaben,
- ergänzt durch Expertenkommentare und Erfahrungen von Lehrer/innen,
- mit besonderer Betonung auf Individualisierung,
- basierend auf dem Theoriebegriff von Hans Aebli, der – aufbauend auf Jean Piaget – die Theorie als eine abgeleitete und dienstbare Rolle zur Praxis sieht. Das Handeln, die Praxis, ist zuerst, daraus entsteht eine Abstraktion oder Theorie, die sich wiederum laufend in der Praxis bewähren muss (siehe AEBLI: Zwölf Grundformen des Lehrens. Grundform 7: Eine Operation aufbauen).

Die Bildungsstandards für Mathematik am Ende der 8. Schulstufe konzentrieren sich derzeit auf Anforderungen, die festlegen, welche Kompetenzen Schüler/innen nachhaltig erworben haben sollen. Sie verdeutlichen eine Erwartung, auf die die Schule hinarbeiten soll. Die bereits durchgeführten Pilotierungen weisen aber darauf hin, dass die mathematisch schwächeren Schüler/innen, die meist in der dritten, zum Teil aber auch in der zweiten Leistungsgruppe anzutreffen sind, diesen Anforderungen zu einem ganz beträchtlichen Ausmaß nicht entsprechen. Ein bloßes Senken der Anforderungen wäre keine geeignete Strategie. Vielmehr geht es um das Herausarbeiten von wirklich zeitgemäßen Basiskompetenzen, die den Bedürfnissen aller Jugendlichen der 8. Schulstufe entsprechen. Erst auf diese bezogen können die Stärken der Schüler/innen dieser Schulstufe Würdigung erfahren.

Kontaktaufnahme zu den Projektgruppen: standards_m8@cyberzauber.at

LITERATUR

AEBLI, Hans: Zwölf Grundformen des Lehrens. Klett-Cotta, Stuttgart 2003

BADEGRUBER, Bernd: Offenes Lernen in 28 Schritten. Veritas, Linz 1996

BM:BWK (Hg.): Bildungsstandards für Mathematik am Ende der 8. Schulstufe. Version 3.0. Oktober 2004

BÜCHTER, Andreas / LEUDERS, Timo: Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen. Cornelsen, Berlin 2005

GIRMES, Renate: [Sich] Aufgaben stellen. Professionalisierung von Bildung und Unterricht. Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung GmbH, Seelze (Velber) 2004

HEYMANN, Hans Werner: Allgemeinbildung und Mathematik. Studien zur Schulpädagogik und Didaktik, Band 13. Beltz, Weinheim 1996

KLIPPERT; Heinz: Methoden-Training. Übungsbausteine für den Unterricht. Beltz, Weinheim 2005 (15. Auflage)

KLIPPERT, Heinz: Teamentwicklung im Klassenraum. Übungsbausteine für den Unterricht. Beltz, Weinheim 2005 (7. Auflage)

LEUDERS; Timo (Hg.): Mathematik Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. Cornelsen, Berlin 2003

LEUDERS, Timo: Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II. Cornelsen, Berlin 2001

LEUTENBAUER, Helmut: Das praktische Handbuch für den Mathematikunterricht der 5. bis 10. Jahrgangsstufe. Auer, Donauwörth 1994

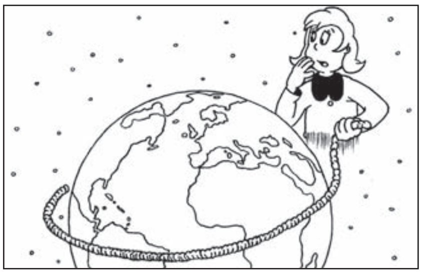
SCHULZ VON THUN, Friedemann / RUPPEL, Johannes / STRATMANN, Roswitha: Kommunikationspsychologie für Führungskräfte. Rowohlt Taschenbuch, Reinbek bei Hamburg 2003

VOLLRATH, Hans-Joachim: Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Spektrum. Akademischer Verlag GmbH, Heidelberg – Berlin 2001

WITTMANN, Erich Ch. Wider die Flut der „bunten Hunde“ und der „grauen Päckchen“: Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und produktiven Übens. In: MÜLLER, Gerhard N. / WITTMANN, Erich Ch.: Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1 und 2. Klett, Stuttgart 1994

KOPIERVORLAGEN

Rund um den Äquator



Arbeitsblatt von:

Nach dem Lesen des ersten Teils wette ich darauf, …	… dass die Maus nicht unter dem Seil durchkommt:	… dass die Maus unter dem Seil durchkommt:
Schüler/in 1	☐	☐
Schüler/in 2	☐	☐
Schüler/in 3	☐	☐
Schüler/in 4	☐	☐

	Gegenstand	Durchmesser (schätzen)	Abstand der Schnur nach der Verlängerung
Führe nun einige Versuche durch und trage die Ergebnisse in die nebenstehende Tabelle ein:			

Nach den Versuchen wette ich darauf, …	… dass die Maus nicht unter dem Seil durchkommt:	… dass die Maus unter dem Seil durchkommt:
Schüler/in 1	☐	☐
Schüler/in 2	☐	☐
Schüler/in 3	☐	☐
Schüler/in 4	☐	☐

Unsere Vermutung:

Rechnung zum Äquator (oder eigenes Beispiel):

Rechnung von Cosina ergänzt um Kommentare und mit Erklärungen:

Cheopspyramide

Kompetenzanzeiger

Name:

Datum:

Bei dieser Aufgabe werden von dir überfachliche Kompetenzen gefordert. Die vorliegende Liste dient zur Orientierung, welche Kompetenzen verlangt werden. Je öfter du „ja“ ankreuzen kannst, desto besser ist die gestellte Aufgabe gelöst.

Mathematische Kompetenzen: M
Überfachliche Kompetenzen: Ü (ÜA Arbeitsweise, ÜK Kooperatives Handeln, ÜP Präsentation)

	ja	nein	
1. Mehrere Vergleiche wurden angestellt.			M
2. Auf den Unterschied zwischen Modell und Wirklichkeit wurde eingegangen.			M
3. Die Auswahl der Vergleiche und die Ergebnisse wurden begründet und erklärt.			M
4. Es wurde schnell und zielsicher recherchiert (Trag ein: I für Internet, L für Lexikon, B für Buch).			ÜA
5. Informationen wurden gefiltert – eine Auswahl wurde getroffen.			ÜA
6. Funktionen in der Gruppe wie Protokollführung, Leitung, Zeitmanagement, Fahrplanüberwachung wurden verteilt.			ÜK
7. Kompromisse wurden geschlossen.			ÜK
8. Zielvereinbarungen wurden getroffen.			
9. Arbeiten wurden aufgeteilt (einzelne Schüler/innen lösten autonom Teilaufgaben)			ÜK
10. Auf die Gesprächsführung in der Gruppe wurde geachtet (aktiv zuhören, Ideen vorstellen, ...)			ÜK
11. Die Präsentation wurde gemeinsam vorbereitet.			ÜK
12. Es wurde darauf geachtet, dass jede Person an der Präsentation beteiligt war.			ÜP
13. Unterlagen für die Zuhörer/innen wurden erstellt.			
14. Die Ausführungen waren für die Zuhörer/innen verständlich.			ÜP
15. Die Arbeitsweise (Schwierigkeiten, Diskussionspunkte) wurde beschrieben und protokolliert.			ÜP
16. Gruppenarbeit und Ergebnisse wurden reflektiert.			ÜP
17. Schüler/innen haben sich der Kritik der Zuhörer/innen gestellt.			ÜP
18. Auf Fragen der Zuhörer/innen wurde eingegangen.			ÜP

Morgendrink

Beiblatt 1

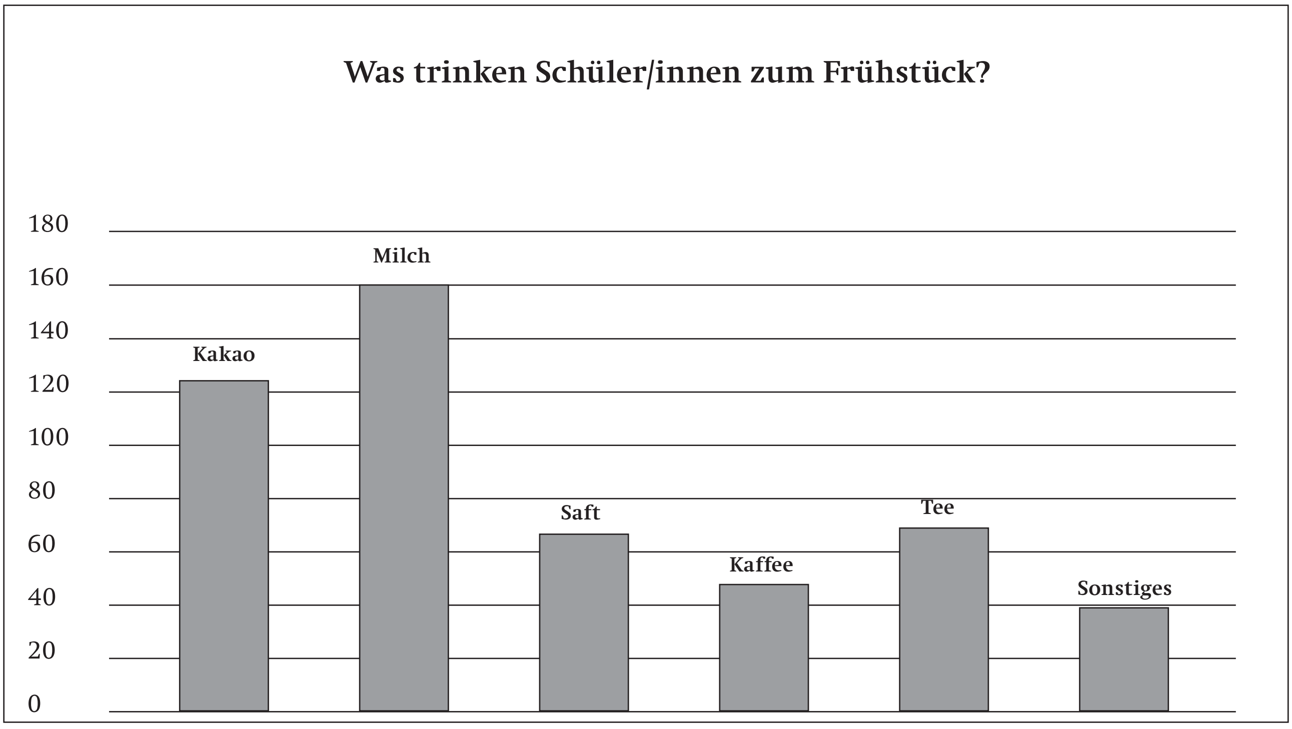
Darstellung der Datenmenge mit Hilfe eines Säulendiagramms

Mit einem Säulendiagramm (oder Stabdiagramm) werden oft die **absoluten Häufigkeiten** dargestellt.
Die grafische Darstellung erfolgt mit Hilfe von beliebig breiten Rechtecken (die Höhe hängt von der absoluten Häufigkeit der Merkmalswerte* ab).

Beim Zeichnen der Rechtecke musst du auf maßstabsgetreue Umrechnung achten. Wird z. B. für eine Person eine Säulenhöhe von 0,5 mm angenommen, dann ergeben sich folgende Säulenhöhen für die einzelnen Getränke. Einige Werte müssen in der Tabelle noch vervollständigt werden.

Kakao	**Milch**	**Saft**	**Kaffee**	**Tee**	**Sonstiges**
$124 \cdot 0{,}5$	$160 \cdot 0{,}5$	62	46		
62 mm	80 mm				

Dieses Säulendiagramm könnte so aussehen:



* Bei unserem Beispiel sind das die Anzahl der Schüler/innen, die Kakao, Milch, Saft, Kaffee, Tee und Sonstiges trinken.

Morgendrink

Beiblatt 2

Darstellung der Datenmenge mit Hilfe eines Prozentstreifens

Mit einem Prozentstreifen (Blockdiagramm) werden oft **relative Häufigkeiten** dargestellt. Die Darstellung erfolgt mit Hilfe eines Rechteckes, dessen Länge von der Gesamtanzahl der Merkmalswerte* abhängt.

Eine Möglichkeit, einen Prozentstreifen zu zeichnen:
Die Gesamtlänge entspricht 500 Werten (Personen). Wenn du als Gesamtlänge zum Beispiel 100 mm nimmst, entspricht 100/500 mm (0,2 mm) der Länge für einen Wert (Person). Oder anders ausgedrückt, entspricht ein Wert (eine Person) einer Breite von 0,2 mm.

Die Längen der Teilrechtecke erhält man demnach folgendermaßen:
Ergänze die Tabelle.

Kakao	**Milch**	**Saft**	**Kaffee**	**Tee**	**Sonstiges**
124 · 0,2	160 · 0,2	62	46 · 0,2		
24,8 mm			9,2 mm		

Bei Vorgabe eines Balkens mit einer Länge von 10 cm (= 100 mm) und einer Breite von 1 cm:

* Bei unserem Beispiel sind das die Anzahl der Schüler/innen, die Kakao, Milch, Saft, Kaffee, Tee und Sonstiges trinken.

Morgendrink

Beiblatt 3

Darstellung der Datenmenge durch ein Piktogramm

Mit einem Piktogramm werden oft die **absoluten Häufigkeiten** dargestellt.
Ein Bild steht für eine bestimmte Anzahl von Ereignissen.
Z. B.: 124 Kinder trinken Kakao.
Man zeichnet für 20 Kinder jeweils 1 Tasse.

Vervollständige die Tabelle.

Kakao	**Milch**	**Saft**	**Kaffee**	**Tee**	**Sonstiges**
124 : 20	160 : 20	62 : 20	46 : ...		
6,2 Tassen	8 Tassen	3,1 Tassen			

Dieses Piktogramm könnte so aussehen:

Morgendrink

Beiblatt 4

Darstellung der Datenmenge durch ein Kreisdiagramm

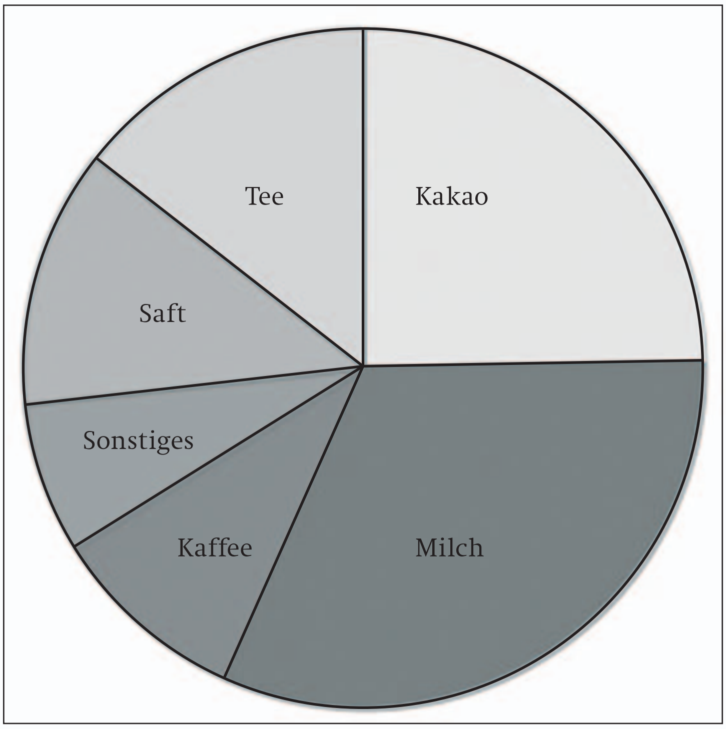
Mit einem Kreisdiagramm (Prozentkreis) werden oft **relative Häufigkeiten** (Angabe in Prozenten) dargestellt.

Damit man die Prozente nicht berechnen muss, geht man oft anders vor:
Man zeichnet einen Kreis mit einem beliebigen Radius. Die Häufigkeiten werden durch Kreissektoren dargestellt, deren Größe durch den Zentriwinkel bestimmt wird.

Da 500 Schüler/innen befragt wurden, entspricht einem Schüler/einer Schülerin ein Zentriwinkel von $\alpha = (360/500)°$. Du musst also für die 124 Kakaotrinker den Winkel $(360/500) \cdot 124 \approx 89°$ zeichnen.
Vervollständige die Tabelle.

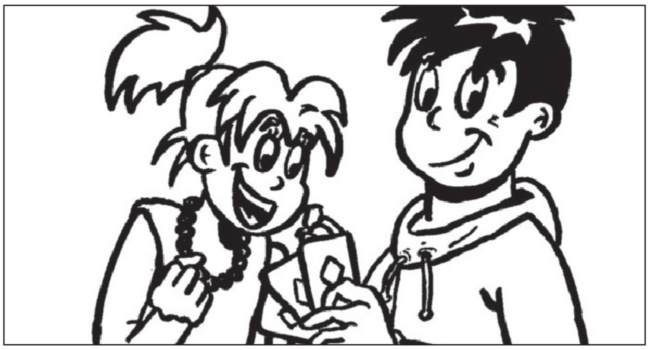
Kakao	Milch	Saft	Kaffee	Tee	Sonstiges
$(360/500) \cdot 124$ $\approx 89°$		$(360/500) \cdot 62$ $\approx 45°$			

Dieses Kreisdiagramm könnte so aussehen:



Prozentschnapsen

Kompetenzanzeiger zum Prozentspiel
für die Lehrerin/den Lehrer



Name der Gruppe:

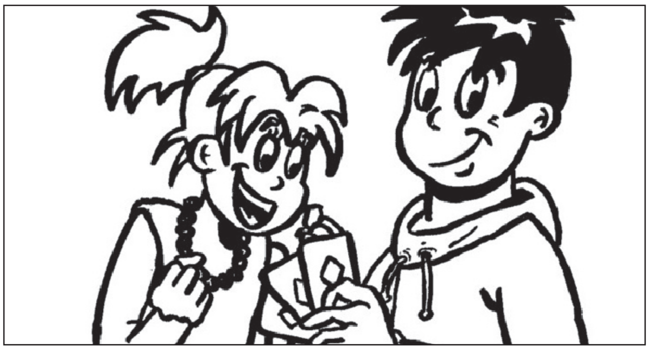
Datum:

Kreuzen Sie bitte an, wie sich die Mitglieder einer Gruppe während des Spiels verhalten haben.
Vergleichen Sie Ihre Aufzeichnungen mit den Rückmeldungen der Gruppe.
Falls Sie mehrere Gruppen beobachten, verwenden Sie für jede Gruppe einen eigenen Beobachtungsbogen.

	ja	eher ja	eher nein	nein
1. Die Gruppenmitglieder haben sich in der Gruppe wohl gefühlt.				
2. Einige Gruppenmitglieder wollten nicht in dieser Gruppe sein.				
3. Die Gruppenmitglieder haben sich an der Erklärung der Spielanleitung beteiligt.				
4. In der Gruppe wurde Einigung erzielt, wie das Spiel zu spielen ist.				
5. Die Gruppenmitglieder haben die Kopfrechnungen selbst durchgeführt.				
6. Bei strittigen Punkten wurde den Mitspieler/innen zugehört, bevor Stellung bezogen wurde.				
7. Einzelne Gruppenmitglieder haben sich bei Unstimmigkeiten in der Gruppe zurückgezogen und abgewartet.				
8. Einzelne Gruppenmitglieder haben manchmal beleidigt reagiert.				
9. In der Gruppe wurde angemessen kommuniziert.				
10. Mehrheitsentscheidungen wurden akzeptiert.				
11. Einige Gruppenmitglieder haben bei Meinungsverschiedenheiten versucht zu vermitteln.				
12. Bestimmte Gruppenmitglieder haben ihre Meinung oft durchgesetzt.				

Das ist mir noch aufgefallen:

Prozentschnapsen



Kompetenzanzeiger zum Prozentspiel
für die Schülerin/den Schüler

Name:

Datum:

Kreuze bitte an, inwieweit du der jeweiligen Aussage zustimmst.

	ja	eher ja	eher nein	nein
1. Ich habe mich in der Gruppe wohl gefühlt.				
2. Ich wollte mit bestimmten Mitschüler/innen in der Gruppe sein.				
3. Wir haben uns die Spielanleitung gegenseitig erklärt.				
4. Wir haben eine Einigung erzielt, wie wir das Spiel spielen.				
5. Ich habe die Kopfrechnungen selbst durchgeführt.				
6. Bei strittigen Punkten habe ich den Mitspieler/innen zugehört, bevor ich Stellung bezogen habe.				
7. Bei Unstimmigkeiten in der Gruppe habe ich mich zurückgezogen und abgewartet.				
8. Manchmal habe ich beleidigt reagiert.				
9. Ich habe Mehrheitsentscheidungen gegen meine Meinung akzeptiert.				
10. Bei Meinungsverschiedenheiten habe ich versucht zu vermitteln.				
11. Meine Meinung habe ich oft durchgesetzt.				

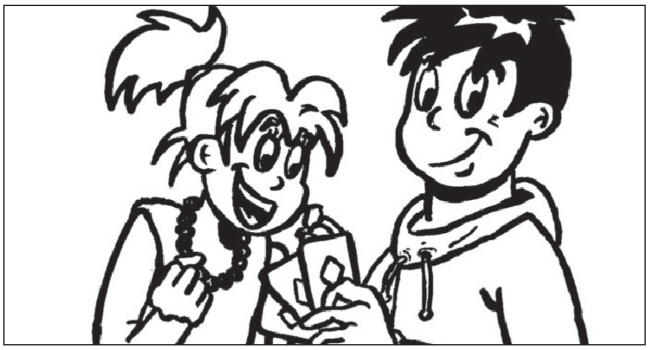
Kurze Begründung zu Punkt 1 („Ich habe mich in der Gruppe wohl gefühlt.“):

Kurze Begründung zu Punkt 2 („Ich wollte mit bestimmten Mitschüler/innen in der Gruppe sein.“):

Das wollte ich noch sagen:

Vergleicht und besprecht anschließend in der Gruppe die vorliegenden Einschätzungen.
Überlegt gemeinsam, welche Rückmeldungen über die Arbeit in der Gruppe ihr eurem Lehrer/eurer Lehrerin weitergeben werdet.

Prozentschnapsen



Lösungsblatt

Variante A

250 € 10 % Rabatt **25 €**	300 € 20 % MwSt. **60 €**	100 € 5 % Rabatt **5 €**	600 € 2 % Skonto **12 €**	1 000 € 25 % Rabatt **250 €**	500 € 50 % Preiserhöhung **250 €**
50 € 200 % Preiserhöhung **100 €**	600 € 3 % Skonto **18 €**	80 € 50 % Ermäßigung **40 €**	500 € 3 % Skonto **15 €**	90 € 10 % Rabatt **9 €**	100 € 2 % Skonto **2 €**
300 € 10 % Rabatt **30 €**	700 € 20 % MwSt. **140 €**	200 € 20 % MwSt. **40 €**	70 € 10 % Preisnachlass **7 €**	800 € 2 % Skonto **16 €**	40 € 200 % Preiserhöhung **80 €**
200 € 5 % Rabatt **10 €**	1 400 € 10 % MwSt. **140 €**	1 200 € 2 % Skonto **24 €**	300 € 2 % Skonto **6 €**	400 € 25 % Rabatt **100 €**	400 € 20 % MwSt. **80 €**
300 € 200 % Preiserhöhung **600 €**					

Prozentschnapsen – Kartenspiel Variante A

Prozentschnapsen

2 – 4 Spielerinnen, 24 Karten

Jede Spielerin bekommt 3 Karten. Die restlichen Karten werden als Päckchen in die Mitte gelegt. Wer links von der „Geberin" sitzt, darf beginnen und spielt eine Karte aus. Die anderen Spielerinnen legen reihum jeweils eine Karte dazu.

Der Wert der Karte ergibt sich aus der Berechnung des Prozentanteils. Wer die höchste Karte angelegt hat, bekommt den „Stich". Bei wertgleichen Karten bekommt jene Spielerin den „Stich", die zuerst ausgespielt hat.

Anschließend nimmt jede vom Kartenpäckchen eine Karte. Jene Spielerin, die den „Stich" gemacht hat, spielt nun aus. Gewonnen hat, wer die meisten „Stiche" gemacht hat.

bm:bwk

www.gemeinsamlernen.at

250 €

10 %
Rabatt

bm:bwk

www.gemeinsamlernen.at

300 €

20 %
MwSt.

bm:bwk

www.gemeinsamlernen.at

100 €

5 %
Rabatt

bm:bwk

www.gemeinsamlernen.at

600 €

2 %
Skonto

bm:bwk

www.gemeinsamlernen.at

1 000 €

25 %
Rabatt

bm:bwk

www.gemeinsamlernen.at

500 €

50 %
Preiserhöhung

bm:bwk

www.gemeinsamlernen.at

50 €

200 %
Preiserhöhung

bm:bwk

www.gemeinsamlernen.at

600 €

3 %
Skonto

bm:bwk

80 €

50 %
Ermäßigung

www.gemeinsamlernen.at

500 €

3 %
Skonto

bm:bwk

www.gemeinsamlernen.at

90 €

10 %
Rabatt

bm:bwk

www.gemeinsamlernen.at

100 €

2 %
Skonto

bm:bwk

www.gemeinsamlernen.at

300 €

10 %
Rabatt

bm:bwk

www.gemeinsamlernen.at

700 €

20 %
MwSt.

bm:bwk

www.gemeinsamlernen.at

200 €

20 %
MwSt.

bm:bwk

www.gemeinsamlernen.at

70 €

10 %
Preisnachlass

bm:bwk

www.gemeinsamlernen.at

800 €

2 %
Skonto

bm:bwk

www.gemeinsamlernen.at

40 €

200 %
Preiserhöhung

bm:bwk

www.gemeinsamlernen.at

200 €

5 %
Rabatt

bm:bwk

www.gemeinsamlernen.at

1 400 €

10 %
MwSt.

bm:bwk

www.gemeinsamlernen.at

1 200 €

2 %
Skonto

bm:bwk

www.gemeinsamlernen.at

300 €

2 %
Skonto

bm:bwk

www.gemeinsamlernen.at

400 €

25 %
Rabatt

bm:bwk

www.gemeinsamlernen.at

400 €

20 %
MwSt.

bm:bwk

www.gemeinsamlernen.at

300 €

200 %
Preiserhöhung

bm:bwk

Prozentschnapsen

2 – 4 Spieler, 24 Karten

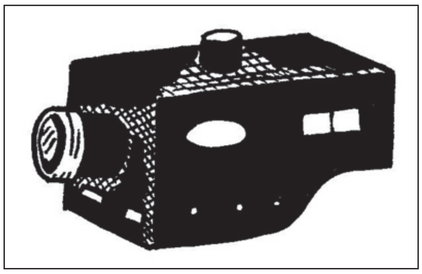
Jeder Spieler bekommt 3 Karten. Die restlichen Karten werden als Päckchen in die Mitte gelegt. Wer links vom „Geber“ sitzt, darf beginnen und spielt eine Karte aus. Die anderen Spieler legen reihum jeweils eine Karte dazu.

Der Wert der Karte ergibt sich aus der Berechnung des Prozentanteils. Wer die höchste Karte angelegt hat, bekommt den „Stich“. Bei wertgleichen Karten bekommt jener Spieler den „Stich“, der zuerst ausgespielt hat.

Anschließend nimmt jeder vom Kartenpäckchen eine Karte. Jener Spieler, der den „Stich“ gemacht hat, spielt nun aus. Gewonnen hat, wer die meisten „Stiche“ gemacht hat.

bm:bwk

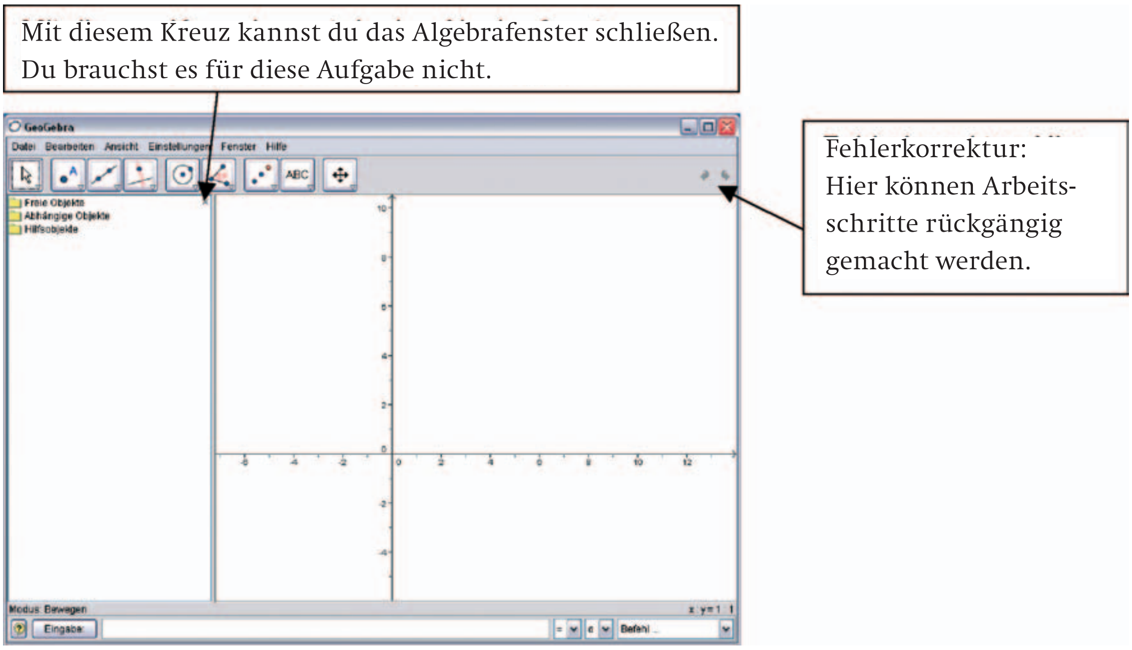
Überwachungskamera



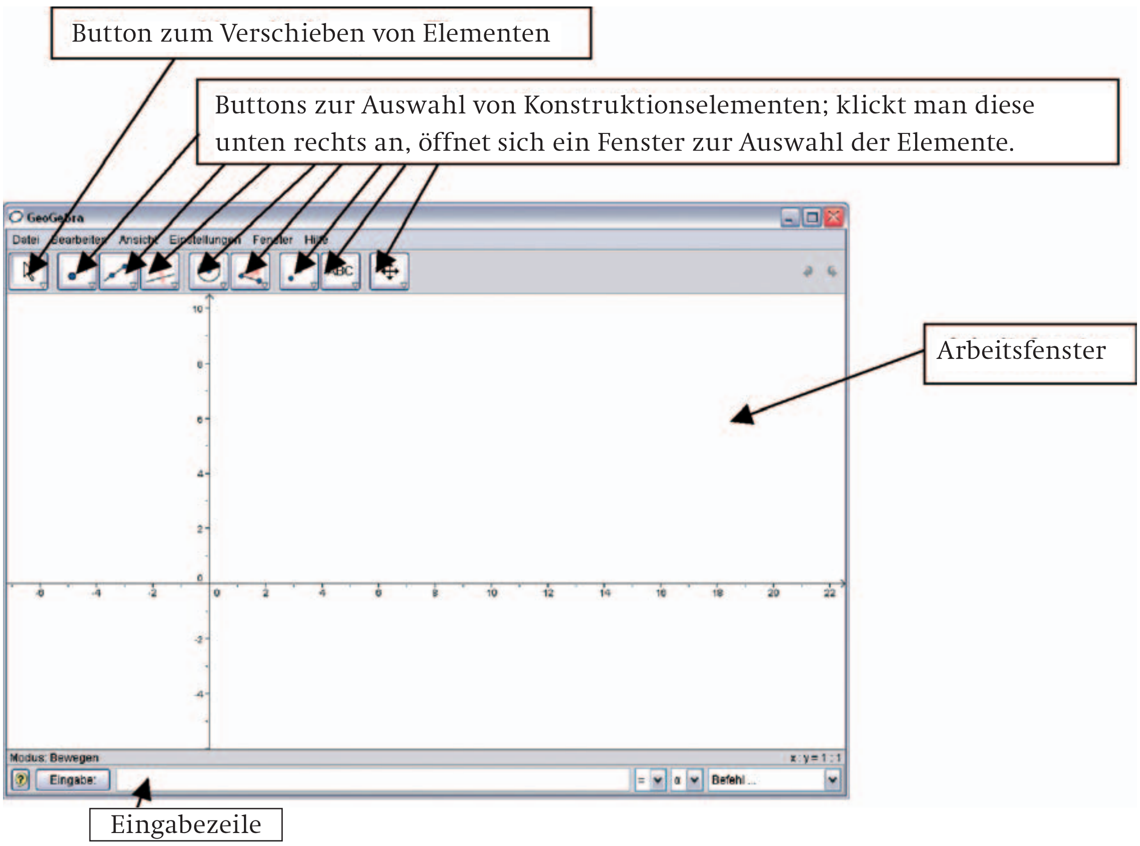
Beilage 1: Screenshots

Starte das Programm GeoGebra.

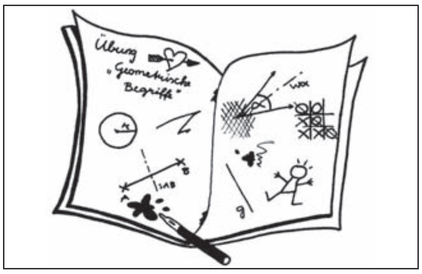
So sieht das Fenster aus, das nach dem Aufruf von GeoGebra angezeigt wird.



Jetzt sieht das Fenster etwa so aus:



Überwachungskamera



Beilage 2: Arbeitsblatt

Verwende die Screenshots als Hilfe bei folgenden Erläuterungen und probiere alles aus.

Überprüfe die Einstellung der Sprache:
Wähle mit der Maus (mit der linken Taste klicken): „Einstellungen“ → „Sprache“ → „Österreichisch“

Beispiel zur Auswahl von Konstruktionselementen:
Klicke zur Auswahl von Konstruktionselementen den 2. Button von links an der rechten unteren Ecke an. Es erscheint ein Fenster mit drei Elementen (Neuer Punkt, Schneide zwei Objekte, Mittelpunkt). Klicke eines davon an. Das ausgewählte Element wird im Button angezeigt. Stelle nun wieder auf „Neuer Punkt“ zurück.

Allgemeines:

- Fehler kannst du rückgängig machen, indem du im Menü „Bearbeiten“ auf „Rückgängig“ klickst. Die Tastenkombination „Strg+z“ führt zum gleichen Ergebnis. Du findest auch ein Symbol ganz rechts neben den Buttons.
- Du erhältst eine Information zu den Symbolen, wenn du mit dem Cursor auf ein Symbol gehst (ohne zu klicken).
- Mit dem ersten Button ganz links , kannst du im Fenster Punkte oder Objekte verschieben.
- In der Eingabezeile („Eingabe:“) unterhalb des Arbeitsfensters kannst du Objekte direkt eingeben. Damit deine Eingaben ausgeführt werden, musst du auf „Enter“ klicken.

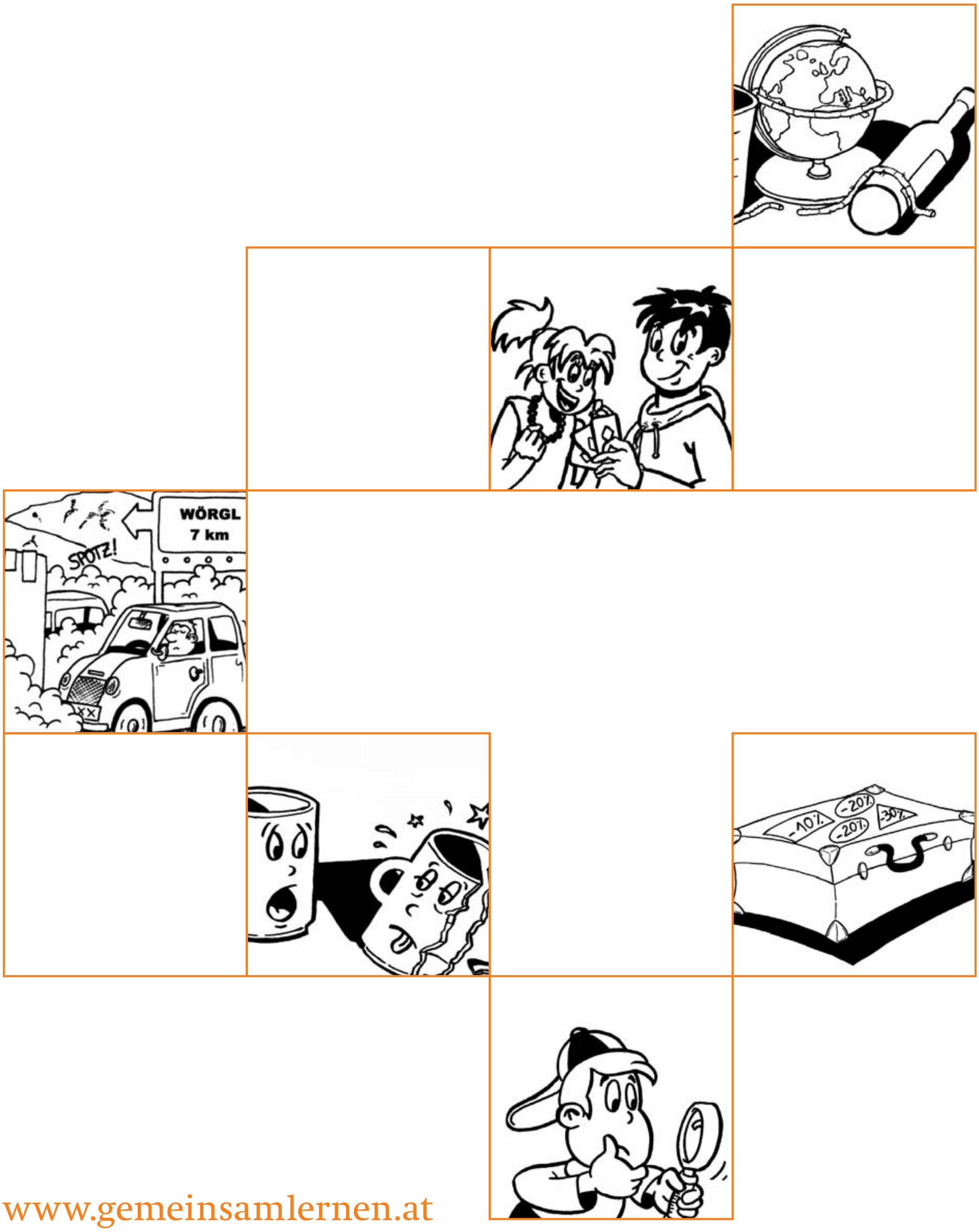
Führe nun folgende Aufgaben nach Anleitung durch. Bei jeder Aufgabe lernst du etwas Neues:

a) **Aufgabe:** Zeichne den Punkt P(3/4) und bewege ihn.
Anleitung: Eingabe: P=(3,4) („Enter“ nicht vergessen). Klicke auf den Button ganz links („Bewegen“), gehe zum Punkt P (er verändert sein Aussehen, wenn du ihn getroffen hast) und klicke ihn mit der linken Maustaste an, halte ihn fest und ziehe ihn an eine gewünschte Stelle.

b) **Aufgabe:** Zeichne einen Kreis mit dem Mittelpunkt P und dem Radius 3 LE.
Eingabe: Kreis[P, 3] Beachte: hast du „Kr“ geschrieben, erscheint gleich „Kreis[]“, du kannst den Cursor nun mit den Pfeiltasten zwischen die eckigen Klammern bewegen.

c) **Aufgabe:** Setze einen Punkt irgendwo hin. Zeichne einen Kreis mit diesem Mittelpunkt, der Kreis soll durch den Punkt P von Aufgabe b) gehen.
Anleitung: Zweiten Button links („Neuer Punkt“) wählen, durch Klicken auf die Arbeitsfläche wird er gesetzt. Wähle den fünften Button von links („Kreis mit Mittelpunkt durch Punkt“): Klicke auf den Punkt, lass los und zieh den Kreis durch den Punkt P (Cursor zum Punkt) und klicke. Mit dem zweiten Button von links kannst du zwei Objekte schneiden, einfach durch Anklicken der Objekte hintereinander. Schneide nun die beiden Kreise.

d) **Aufgabe:** Erstelle ein neues Arbeitsblatt; Zeichne ein Dreieck und die Winkelsymmetrale des Winkels α und erstelle einen Ausdruck.
Anleitung: Wähle „Datei“ und „Neu“ (Speichern? → Nein“); Dritter Button von links „Vieleck“ und klicke auf das Arbeitsblatt, ein Punkt entsteht; zieh den Cursor bis zum nächsten Punkt, klicke (2. Punkt), zieh weiter, klicke (3. Punkt) und geh zum ersten Punkt zurück, klicke. Das Dreieck ist fertig. Winkelsymmetrale: Wähle „Winkelsymmetrale“ (4. Button links) und klicke im Uhrzeigersinn die Punkte in der Reihenfolge so an, dass der Scheitel des Winkels als Zweites gedrückt wird, also klicke der Reihe nach C, A (Scheitel), B.
Tipp: Wähle einen Punkt auf der Winkelsymmetrale und miss die Abstände zu den beiden Geraden. Mach das mit mehreren Punkten. Was fällt dir auf?
Ausdruck: „Datei“ „Druckvorschau“ → „Zeichenblatt“ → „Drucken“



www.gemeinsamlernen.at