

CHEOPSPYRAMIDE

Variante A



Arbeitet in Gruppen zu drei bis vier Personen.

Überlegt euch konkrete mathematische Fragestellungen.

Sucht Antworten auf die Frage von Sunis.

Was ist vergleichbar?

Entscheidet euch für einen oder zwei Vergleiche.

Sucht Möglichkeiten für die Berechnungen.

Holt euch die notwendigen Informationen zur Cheopspyramide und zu einem Fußballfeld aus dem Internet.

Führt entsprechende Berechnungen durch.

Worin unterscheiden sich eure Berechnungen von der Wirklichkeit?

Legt für die Gruppe einen Arbeitsplan und eine Aufgabenverteilung fest.

Wer ist wofür zuständig?

Wie viel Zeit ist für die einzelnen Teilaufgaben vorgesehen – wer achtet auf die Zeit?

Bereitet eine Präsentation eurer Ergebnisse vor.

In welcher Form findet die Präsentation statt und wer übernimmt die einzelnen Teile?

Folgende Punkte sind zu berücksichtigen:

Zu welchen Größenverhältnissen seid ihr gekommen?

Wodurch unterscheiden sich die Berechnungen von der Wirklichkeit?

Arbeitszeit: 1 Unterrichtsstunde (inkl. Vorbereitung der Präsentation der Ergebnisse)

Hinweis: Bei dieser Aufgabe werden von euch mathematische und überfachliche Kompetenzen gefordert. Zur Orientierung könnt ihr einen Kompetenzanzeiger benutzen. Je mehr Punkte ihr erreicht, desto besser erfüllt ihr die gestellte Aufgabe.

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

Variante B

Arbeitet in Gruppen zu drei bis vier Personen.



Überlegt euch konkrete mathematische Fragestellungen.

Sucht Antworten auf die Frage von Sunis.

Entscheidet euch für einen oder zwei Vergleiche.

Führt entsprechende Berechnungen durch.

Legt für die Gruppe einen Arbeitsplan und eine Aufgabenverteilung fest.

Bereitet eine Präsentation eurer Ergebnisse vor.

Arbeitszeit: 1 Unterrichtsstunde (inkl. Vorbereitung der Präsentation der Ergebnisse)

Hinweis:

Bei dieser Aufgabe werden von euch mathematische und überfachliche Kompetenzen gefordert. Damit ihr euch orientieren könnt, was verlangt wird, könnt ihr einen Kompetenzanzeiger benutzen. Je mehr Punkte ihr erreicht, desto besser erfüllt ihr die gestellte Aufgabe.

Variante C

Arbeitet in Gruppen zu drei bis vier Personen.



Überlegt euch konkrete mathematische Fragestellungen zum Comic und präsentiert eure Überlegungen und Ergebnisse der Klasse.

Arbeitszeit: 1 Unterrichtsstunde (inkl. Vorbereitung der Präsentation der Ergebnisse)

Hinweis:

Bei dieser Aufgabe werden von euch mathematische und überfachliche Kompetenzen gefordert. Damit ihr euch orientieren könnt, was verlangt wird, könnt ihr einen Kompetenzanzeiger benutzen. Je mehr Punkte ihr erreicht, desto besser erfüllt ihr die gestellte Aufgabe.

Anmerkung: Der Kompetenzanzeiger befindet sich als Kopiervorlage im Anhang.

Exemplarische Lösungen

Informationen aus dem Internet (z. B.: www.wikipedia.de, Suchbegriff: Cheopspyramide) oder aus dem Lexikon

Je nach Quelle gibt es unterschiedliche Größenangaben, ein mögliches Suchergebnis könnte so lauten:

Die Cheopspyramide in Zahlen (Internet):

Basislänge 230,38 Meter, Höhe 146,60 Meter, zwei Millionen Kalksteinblöcke à 2,5 Tonnen wurden in 20 - 30 Jahren von 100 000 Arbeitern verbaut.

Fußballfeld (internationale Spiele):

Länge: 100 bis 110 Meter

Breite: 64 bis 75 Meter

Vergleichsmöglichkeiten:

- Grundfläche der Pyramide mit dem Fußballfeld
- Eine Seitenfläche mit dem Fußballfeld
- Mantel mit dem Fußballfeld
- Oberfläche mit dem Fußballfeld
- Längenvergleiche (z. B. Basislänge mit Länge des Fußballfeldes)

Berechnungen (Angaben auf Meter gerundet):

Fußballfeld: maximal: $A_{\max} = 8\,250\text{ m}^2$, minimal: $A_{\min} = 6\,400\text{ m}^2$

Pyramide: Höhe der Seitenfläche: 187 m (Berechnung unter Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes)

Mantel: $86\,000\text{ m}^2$

Verhältnis: $M_p : A_{\max} \approx 10 : 1$; $M_p : A_{\min} \approx 13 : 1$

Dreiecksfläche: $21\,500\text{ m}^2$

Verhältnis: Dreiecksfläche : $A_{\max} \approx 2,6 : 1$; Dreiecksfläche : $A_{\min} \approx 3,4 : 1$

Grundfläche: $52\,900\text{ m}^2$

Verhältnis: Grundfläche Pyramide : $A_{\max} \approx 6,4 : 1$; Grundfläche : $A_{\min} \approx 8,3 : 1$

Oberfläche: $138\,900\text{ m}^2$

Verhältnis: Oberfläche : $A_{\max} \approx 17 : 1$; Oberfläche : $A_{\min} \approx 22 : 1$

Präsentationsmöglichkeiten und Produkte:

- Weiterführung des Gesprächs
- Folie
- Plakat
- PowerPoint
- Interview
- Zeitungsartikel

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

Überlegungen zur Aufgabenstellung

Vorgabe der Arbeitszeit

Die Zeitvorgabe ist ein Bestandteil der Aufgabe; die Schüler/innen haben sich daran zu halten und sich die Zeit dementsprechend einzuteilen. Der Zeitaufwand für die Internetsuche, die Suche nach Vergleichsmöglichkeiten, die Zeit für die Berechnungen und die Vorbereitung der Präsentation sind von den Schüler/innen einzuplanen; nur eine effiziente arbeitsteilige Teamarbeit führt zu einem befriedigenden Ergebnis. Für die Durchführung der gesamten Unterrichtssequenz sind zwei Unterrichtsstunden vorzusehen. Will man nicht alle Gruppen präsentieren lassen, können einige Gruppen für die Präsentation ausgelost werden.

Warum drei Varianten?

Die Varianten zeigen den Übergang von eher geschlossenen zu offenen Aufgabenstellungen. Mit offenen Aufgabenstellungen wird dem entdeckenden Lernen besser entsprochen. Gerade die offene Aufgabenstellung eignet sich für eine 3. Leistungsgruppe. Zusammen mit den Schüler/innen können die mathematischen Aufgaben formuliert werden.

Variante A: Zwischenschritte für die Arbeitsaufträge werden formuliert.

Variante B: Das Bild mit Arbeitsauftrag wird angeboten (für in dieser Methode bereits geübte Schüler/innen).

Variante C: Das Bild wird mit offener Aufgabenstellung angeboten (für Schüler/innen, die gewohnt sind, mit offenen Arbeitsaufträgen zu arbeiten).

Offene Aufgabenstellung und handlungsorientierter Zugang zur Mathematik



Lernen kann nur von Lernenden selbst vollzogen werden. Unterricht kann nur Angebote an die Lernenden machen. Da sich Unterricht an vorgegebenen Zielen orientiert, kann der Widerspruch, der sich daraus ergibt, nur überwunden werden, wenn Lernende die Möglichkeit erhalten, die Wege, welche zu den Zielen führen, selbst zu bestimmen.

Über die offene Aufgabenstellung können (v. a. leistungsschwächere) Schüler/innen die für sie geeignete Zugangsform zur Bewältigung des Problems selbst wählen. Manche Schüler/innen brauchen den handlungsorientierten Zugang. Sie erfassen den Sachverhalt, wenn sie handelnd damit umgehen können. Sie verinnerlichen die Handlungen und bauen Operationen auf. Es können Zeichnungen angefertigt, Modelle verwendet oder selbst hergestellt werden oder es kann nach ähnlichen Vergleichen (etwa im Schulhof) gesucht werden.

Manche Schüler/innen erfassen Sachverhalte durch Bilder oder Grafiken. Auch dazugehörige Geschichten sind hilfreich. Bilder oder Geschichten zur Pyramide und zum Fußballfeld können im Internet oder in anderen Medien gefunden werden. Wiederum andere Schüler/innen können auf der symbolischen Ebene agieren. Im offenen Unterricht werden für diese unterschiedlichen Schüler/innen individuelle Zugangsmöglichkeiten geboten. Materialien können angeboten (in der 2. und 3. LG) oder selbst gesucht werden. In gemischten Gruppen können sich Schüler/innen gegenseitig unterstützen.

Vertiefung der Begriffsbildung durch gemeinsame Darstellung

Aebli und Fricke zeigten auf, „dass miteinander verwandte Begriffsbildungen sich gegenseitig stützen und dass gerade die Kontrastierung ähnlicher Begriffe erst eine vertiefte Abgrenzung zulässt“ (siehe LEUTENBAUER 1994, S. 23). Nach dem Erlernen von Einzelwissen – in diesem Fall die Berechnung des Flächeninhaltes eines Rechtecks, der Oberfläche und des Volumens einer Pyramide – ist es notwendig, das Gemeinsame und das Unterschiedliche genau herauszuarbeiten.

BEGRIFFSBILDUNG
MATHEMATISCHE
FACHSPRACHE

Die mathematische Frage- und Problemstellung zu Pyramide und Fläche ist so illustriert, dass die Schüler/innen zum Nachdenken angeregt werden. Der zunächst absurd erscheinende Vergleich einer Pyramide (Körper) mit einem Fußballfeld (Fläche) führt zu einem vertieften Nachdenken über diesen Sachverhalt. Eine Angabe, die sofort einen Vergleich Volumen mit Volumen bzw. Fläche mit Fläche ermöglicht, regt keine Gespräche zu den Grundvorstellungen an. Unterschiedliche Ausgangsinterpretationen führen zu den gewünschten Diskussionen. Erst dann müssen Kompetenzen des kooperativen Handelns eingesetzt werden. Die Begriffe Fläche, Oberfläche, Grundfläche und Volumen werden in der Gruppenarbeit vertieft.

Nachhaltige Lernprozesse anregen

Erkenntnisse lassen sich nicht alleine durch Vorzeigen der Lehrperson auf die Schüler/innen übertragen. Jede/r Schüler/in muss sich das Wissen selbst erarbeiten. Durch das eigenständige Operieren wird Wissen angeeignet und gefestigt. Lern- und Übungsprozess gehen durch das gemeinsame Erarbeiten und gegenseitige Präsentieren ineinander über.

NACHHALTIGKEIT

Offenes Lernen erfordert überfachliche Kompetenzen

Der Einstieg in das offene Lernen mit dem vorliegenden Pyramidenbeispiel in einer Klasse, die offenes Lernen nicht kennt, verursacht vermutlich bei vielen Beteiligten Frustration. BADEGRUBER nennt 28 Schritte für das Erlernen offener Lernformen, KLIPPERT hat das Methodentraining, das Kommunikationstraining und die Teamentwicklung dem eigenverantwortlichen Lernen vorangestellt. Aus diesem Grund werden drei Varianten – von der strukturierten zur offenen Aufgabenstellung – angeboten. Sind Schüler/innen an offene Aufgabenstellungen noch nicht gewöhnt, kann das Beispiel mit der genauen Arbeitsanleitung ein erster Schritt in diese Richtung sein.

Damit die Schüler/innen der offenen Fragestellung der Variante C gerecht werden können, bedarfes eines gezielten methodischen Aufbaus des Unterrichts in den unteren Klassen. Ziel des Unterrichts soll es sein, Schüler/innen an den Umgang mit offenen Fragestellungen zu gewöhnen und ihnen das Rüstzeug zur Bewältigung dieser Aufgaben mitzugeben.

Überfachliche Kompetenzen ergänzen den mathematischen Lernprozess

Der Zugang zur Aufgabe ist einerseits praxisnah – in der Variante C auch völlig offen und schülerzentriert. Größenvergleiche ohne Datenangabe sind alltäglich. Die entsprechenden Daten zu beschaffen, um sie vergleichbar zu machen, stellt eine Anforderung aus dem Alltag dar. Die Darstellung in Form eines Comics und der – nahezu absurde – Vergleich machen das Beispiel für Schüler/innen interessant und ansprechend. Die Motivation, sich mit der Aufgabe zu beschäftigen, ist damit gegeben.

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

**KOOPERATIVES
HANDELN**

Die Gruppenarbeit ermöglicht kreative Ansätze. Jede Person in der Gruppe kann ihre Ideen einbringen. Die Schüler/innen setzen sich intensiv und direkt mit der Aufgabenstellung auseinander. Während einzelne Gruppen das Problem selbstständig lösen werden, können andere durch Hilfestellung unterstützt werden.

PRÄSENTIEREN

Bei der Präsentation ist einerseits die Lösung des mathematischen Problems gefordert, andererseits ist auf die Arbeitsweise der Gruppe einzugehen (Arbeitsplan, Informationsbeschaffung, Vorschläge für die Vergleiche und Einigung auf einen oder mehrere Vergleiche, ...). Je mehr Punkte im Kompetenzanzeiger (siehe „Transparenz der Ziele“) erfüllt werden, desto wertvoller wird die Lösung der Aufgabe. Dadurch werden die angestrebten Kompetenzen ersichtlich und nachvollziehbar.

MODELLBILDEN

Mathematik ist ursprünglich aus praktischen Problemen erwachsen. Schwer verstehbare Sachverhalte werden durch einen Vergleich mit Bekanntem vereinfacht. Ein Fußballfeld ist für Schüler/innen vertraut und überschaubar. Die Ausmaße einer Pyramide dagegen führen meist zu großem Erstaunen. Die Cheopspyramide ist den Schüler/innen aus dem Geschichte-, Geografieunterricht oder aus den Medien bekannt. Diese Situation ermöglicht es, unterschiedliche Fragestellungen zu entwerfen und unterschiedliche Antworten zu finden.

Der entscheidende Schritt für Schüler/innen ist die Übersetzung der Textaufgabe in die mathematische Aufgabenstellung, das Modellbilden. Die Brücke zu anderen Lebensbereichen und Fächern erleichtert das mathematische Modellbilden.

Aus dem Lehrplan

Die Schülerinnen und Schüler sollen

- mathematisches Können und Wissen aus verschiedenen Bereichen ihrer Erlebnis- und Wissenswelt nutzen sowie durch Verwenden von Informationsquellen weiter entwickeln. Das Bilden mathematischer Modelle und das Erkennen ihrer Grenzen soll zu einem verantwortungsvollen Umgang mit Aussagen führen, die mittels mathematischer Methoden entstanden sind;
- in Verfolgung entsprechender Lernziele produktives geistiges Arbeiten, Argumentieren und exaktes Arbeiten, kritisches Denken, Darstellen und Interpretieren als mathematische Grundtätigkeiten durchführen, wobei sie dazu hingeführt werden sollen, Lernprozesse selbstständig zu gestalten;
- durch das Benutzen entsprechender Arbeitstechniken, Lernstrategien und heuristischer Methoden Lösungswege und -schritte bei Aufgaben und Problemstellungen planen und in der Durchführung erproben;
- verschiedene Technologien (z. B. Computer) einsetzen können.

**Transparenz der Ziele, Kompetenzanzeiger**

Bei den Varianten B und C erhalten die Schüler/innen mit der Aufgabenstellung Zielvorgaben, damit sie sich orientieren und ihre Arbeit selbst beurteilen. Sowohl die mathematischen als auch die überfachlichen Kompetenzen werden angeführt.

Erfahrungsberichte

- Schüler/innen finden Comics ansprechend.
- Die Internetrecherche kann je nach Computerangebot unterschiedlich durchgeführt werden: eine Gruppe sucht nach Informationen und gibt sie an andere weiter, alle Schüler/innen haben Zugang zum Internet oder eine/r pro Gruppe sucht nach Informationen.
- Die zusätzlichen Informationen aus dem Internet regen unterschiedliche Modellbildungen und Lösungswege an.
- Schüler/innen kommen auf Lösungswege, die vorher nicht absehbar waren, z. B. wird diskutiert, wie viele Steinblöcke der Pyramide auf der Fläche des Fußballfeldes Platz haben könnten, oder es wird ein Schwimmbecken mit der Pyramide verglichen („da kann man alle Dimensionen vergleichen“); auch andere Sportplätze (z. B. Tennisplatz oder Basketballplatz) wurden für den Vergleich gewählt.
- Für Schüler/innen ist der Vergleich von Fußballfeld und Pyramide nichts Außergewöhnliches – jede/r kennt ein Fußballfeld aus dem Leben und die Cheopspyramide aus dem Unterricht.
- Manche Lehrer/innen stehen dem Beispiel von vornherein skeptisch gegenüber. (Es müsste genauer untersucht werden, ob das Lehrer/innen sind, denen offene Beispiele unbekannt sind.)
- Wenn Schüler/innen Gruppenarbeit gewohnt sind, gibt es auch bei der offenen Variante keine Probleme, andernfalls muss auf klare Regeln bei der Gruppenarbeit geachtet werden.
- Präsentationen werden sehr eintönig, wenn Schüler/innen keine unterschiedlichen Präsentationsformen kennen. Dies wäre eine wesentliche Vorarbeit.
- Eine weitere gute Voraussetzung ist gegeben, wenn Schüler/innen lernzielorientiertes Lernen gewohnt sind.

Originalzitate von Lehrer/innen

„Durch den großen Arbeitsaufwand vergessen die Schüler/innen oft auf die Mathematik.“

Kommentar: Wenn Methoden für Schüler/innen neu sind, konzentrieren sie sich zunächst darauf. Ist die Methode bekannt, rückt die Mathematik wieder in den Mittelpunkt.

„Für Präsentation zu wenig Zeit.“

Kommentar: Nachhaltiges Lernen braucht Zeit. Präsentation ist ein wesentlicher Faktor für Nachhaltigkeit. „Was ich präsentieren kann, habe ich verstanden.“

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

Cheopspyramide

Kompetenzanzeiger

Name:

Datum:



Bei dieser Aufgabe werden von dir überfachliche Kompetenzen gefordert. Die vorliegende Liste dient zur Orientierung, welche Kompetenzen verlangt werden. Je öfter du „ja“ ankreuzen kannst, desto besser ist die gestellte Aufgabe gelöst.

Mathematische Kompetenzen: M

Überfachliche Kompetenzen: Ü (ÜA Arbeitsweise, ÜK Kooperatives Handeln, ÜP Präsentation)

	ja	nein	
1. Mehrere Vergleiche wurden angestellt.			M
2. Auf den Unterschied zwischen Modell und Wirklichkeit wurde eingegangen.			M
3. Die Auswahl der Vergleiche und die Ergebnisse wurden begründet und erklärt.			M
4. Es wurde schnell und zielsicher recherchiert (Trag ein: I für Internet, L für Lexikon, B für Buch).			ÜA
5. Informationen wurden gefiltert – eine Auswahl wurde getroffen.			ÜA
6. Funktionen in der Gruppe wie Protokollführung, Leitung, Zeitmanagement, Fahrplanüberwachung wurden verteilt.			ÜK
7. Kompromisse wurden geschlossen.			ÜK
8. Zielvereinbarungen wurden getroffen.			
9. Arbeiten wurden aufgeteilt (einzelne Schüler/innen lösten autonom Teilaufgaben)			ÜK
10. Auf die Gesprächsführung in der Gruppe wurde geachtet (aktiv zuhören, Ideen vorstellen, ...)			ÜK
11. Die Präsentation wurde gemeinsam vorbereitet.			ÜK
12. Es wurde darauf geachtet, dass jede Person an der Präsentation beteiligt war.			ÜP
13. Unterlagen für die Zuhörer/innen wurden erstellt.			
14. Die Ausführungen waren für die Zuhörer/innen verständlich.			ÜP
15. Die Arbeitsweise (Schwierigkeiten, Diskussionspunkte) wurde beschrieben und protokolliert.			ÜP
16. Gruppenarbeit und Ergebnisse wurden reflektiert.			ÜP
17. Schüler/innen haben sich der Kritik der Zuhörer/innen gestellt.			ÜP
18. Auf Fragen der Zuhörer/innen wurde eingegangen.			ÜP