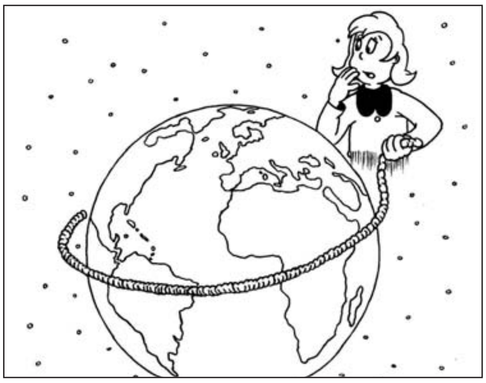
RUND UM DEN ÄQUATOR

Stell dir den Äquator idealisiert als Kreis (r = 6 370 km) vor. Um den Äquator wird ein Seil gespannt. Dieses Seil wird um einen Meter verlängert und dann kreisförmig mit einem Abstand zum Äquator um die Erde herum gelegt. Ist der Abstand so groß, dass eine Maus darunter kriechen kann? Worauf würdest du wetten: Kommt die Maus durch oder kommt sie nicht durch?



Folgende Schritte führen dich zur Lösung des Problems:

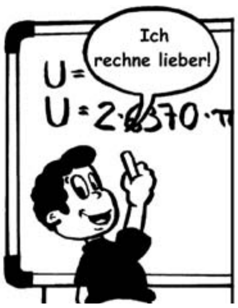
Schritt 1: Arbeit in Vierergruppen
Tragt eure Meinungen in das Arbeitsblatt ein (Beilage).

Führt nun mehrere Versuche durch:
Messt mit einer Schnur den Umfang eines Gegenstandes mit kreisförmigem Querschnitt (z. B. Umfang einer Flasche, Papierkorb, Globus, Kugelschreiber, ...).
Verlängert jeweils den Umfang um einen Meter und legt die Schnur in gleichmäßigem Abstand um diesen Gegenstand herum.

Beantwortet folgende Fragen auf dem Beilagenblatt:

- Worauf würde jede Person in der Gruppe jetzt wetten? Tragt die Meinungen ein.
- Wie viele haben ihre Meinung geändert?
- Zu welcher Vermutung kommt ihr nach der Durchführung mehrerer Versuche?

Schritt 2: Partnerarbeit (Teilung der Vierergruppe)
Versucht jetzt das Problem rechnerisch zu lösen.



Berechnet ausgehend vom Erdradius den Umfang des Äquators und dann den Radius des Kreises, der mit dem um 1 m verlängerten Umfang gelegt werden kann. Rechnet dabei auf mm genau.

Falls ihr es nicht allein schafft, beratet euch in der Vierergruppe. Wenn euch die Zahlen für die Erde zu groß sind, nehmt einen anderen Radius. Denkt an die Versuche!

Schritt 3: Partnerarbeit
Cosina hat folgende Berechnungen angestellt, aber leider auf einige Kommentare vergessen. Was meint Cosina mit diesen Rechnungen?

Erklärt die Berechnung und erläutert das Ergebnis (Rechnung in Meter):
Alter Kreis: $u = 2\,r\,\pi$
Neuer Kreis: $u + 1 = 2\,r\,\pi + 1$
Neuer Radius:
$(u + 1) : (2\,\pi) = (2\,r\,\pi + 1) : (2\,\pi) = r + \frac{1}{2\,\pi} \approx r + 0{,}16$

Anmerkung: Das Arbeitsblatt befindet sich als Kopiervorlage im Anhang.

Möglicher Lösungsweg

Pro Gruppe wird eine Schnur mit zirka 3 m Länge benötigt.

Wenn einigermaßen präzise gearbeitet wird, erkennen die Schüler/innen sehr schnell, dass der Abstand des neuen Kreises vom alten Kreis immer gleich groß ist, egal wie groß der ursprüngliche Kreis ist.

ZUSAMMENHÄNGE ERKENNEN UND BEGRÜNDEN

Umfang Äquator: $u \approx 40\,023\,890{,}406$ m
neuer Radius: $40\,023\,891{,}406 : (2\,\pi) \approx 6\,370\,000{,}159$ m
Nicht alle Taschenrechner zeigen ausreichend viele Stellen an. Beachten Sie die notwendige Genauigkeit auf mm.

Interessant ist es, wenn die einzelnen Gruppen mit unterschiedlichen Kreisradien rechnen.

Beweis und Kommentare könnten folgendermaßen aussehen:
Ein Kreis mit dem Radius r (in m) hat den Umfang $u = 2\,r\,\pi$.
Der Umfang wird um einen Meter verlängert, also $u + 1$.
Setzt man für den Umfang $2\,r\,\pi$ ein, kann der Umfang des neuen Kreises angeschrieben werden durch $u_{neu} = 2\,r\,\pi + 1$.
Der neue Umfang dividiert durch $2\,\pi$ ergibt den neuen Radius:
$r_{neu} = (2\,r\,\pi + 1) : (2\,\pi) =$ (Anwendung des Distributivgesetzes)
$= r + \frac{1}{2\,\pi} \approx r + 0{,}16$ (in m)

ANNAHMEN UND VORAUSSETZUNGEN BEGRÜNDEN UND BEWEISEN

Der neue Radius unterscheidet sich also vom alten Radius um zirka 16 cm unabhängig vom alten Radius.

Überlegungen zur Aufgabenstellung

Naturwissenschaftliche Arbeitsweise

Das Beispiel soll einen Beitrag zur naturwissenschaftlichen Arbeitsweise leisten: ausgehend von einer Fragestellung werden Vermutungen angestellt. Die darauf folgenden Experimente bestärken oder widerlegen die Vermutungen, Hypothesen werden formuliert, Berechnungen angestellt. Daraus ergibt sich die Frage, ob ein allgemeiner Beweis möglich ist. Die einzelnen Berechnungen in der Aufgabenstellung bringen die Schüler/innen auf die Spur des allgemeinen Beweises. Die Schüler/innen arbeiten sehr handlungsorientiert und erleben Mathematik dadurch mit vielen Sinnen.

KOOPERATIVES HANDELN

Schritt 1: Experimenteller Zugang
In der Gruppenarbeit geht es um das Vertreten von Meinungen und um den Umgang mit Meinungsverschiedenheiten. Treten Schwierigkeiten in der Gruppe auf, müssen diese angesprochen werden. Wichtig ist, dass die Gruppe eine gemeinsame Entscheidung trifft und eine Vermutung formuliert.

OPERIEREN

Schritt 2: Rechnerischer Zugang – Bestätigung der Vermutung an einem Beispiel
In einer Partnerarbeit wird ein Beispiel herausgegriffen. Es können kleine oder große Zahlen (Erdradius) verwendet werden. Kleinere Ausgangszahlen ermöglichen ein Berechnen mit dem Taschenrechner. Haben zwei Zweiergruppen, die eine Vierergruppe bilden, unterschiedliche Zahlen gewählt, liegt jetzt schon eine Verallgemeinerung nahe. Drei Zweiergruppen mit unterschiedlichen Ausgangszahlen zeigen diese Tendenz noch deutlicher (von außen gesteuerte Gruppenbildung).

ARGUMENTIEREN UND BEGRÜNDEN

Schritt 3: Verallgemeinerung – Beweis der Vermutung
Für leistungsstarke Schüler/innen wird es nun kein Problem mehr sein, zu einer Verallgemeinerung zu kommen und die Vermutung zu beweisen. Die teilweise Ergänzung mit Kommentaren bahnt das Argumentieren und Begründen an.

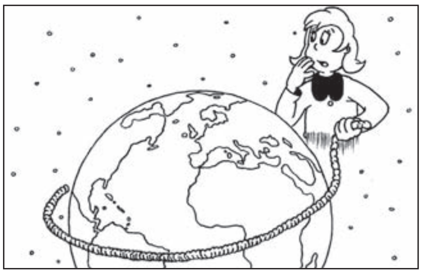
KRITISCHES DENKEN: UNTERSCHEIDUNG VON MEINUNGEN, FAKTEN UND ARGUMENTEN

Das beiliegende Arbeitsblatt ist für Schüler/innen ein begleitendes Protokoll, für Lehrer/innen ein Instrument der Rückmeldung (was Schüler/innen gelernt haben) bzw. der Bewertung. Das Formular soll den Unterschied zwischen Meinungen und Fakten zeigen. Am Anfang haben die Schüler/innen Vermutungen (Meinungen), zum Schluss Fakten.

Je nach Leistungsgruppe werden nicht alle Schritte möglich sein.

aus: Exemplarische, beziehungsreiche Aufgaben, Februar 2006

Rund um den Äquator



Arbeitsblatt von:

Nach dem Lesen des ersten Teils wette ich darauf, …	… dass die Maus nicht unter dem Seil durchkommt:	… dass die Maus unter dem Seil durchkommt:
Schüler/in 1	☐	☐
Schüler/in 2	☐	☐
Schüler/in 3	☐	☐
Schüler/in 4	☐	☐

Führe nun einige Versuche durch und trage die Ergebnisse in die nebenstehende Tabelle ein:

Gegenstand	Durchmesser (schätzen)	Abstand der Schnur nach der Verlängerung

Nach den Versuchen wette ich darauf, …	… dass die Maus nicht unter dem Seil durchkommt:	… dass die Maus unter dem Seil durchkommt:
Schüler/in 1	☐	☐
Schüler/in 2	☐	☐
Schüler/in 3	☐	☐
Schüler/in 4	☐	☐

Unsere Vermutung:

Rechnung zum Äquator (oder eigenes Beispiel):

Rechnung von Cosina ergänzt um Kommentare und mit Erklärungen: