
VARIATIONEN DER INHALTS- UND HANDLUNGSDIMENSIONEN

Durch Variationen unterschiedliche Kompetenzen trainieren

Viele herkömmliche Aufgaben lassen sich im Sinne der Bildungsstandards einsetzen, wenn man das eine oder andere weglässt bzw. dazugibt. Hier wird dargestellt, wie Schüler/innen durch Variation von Aufgabenstellungen zum Erarbeiten und Üben der geforderten mathematischen Kompetenzen herangeführt werden können. So werden zum Beispiel durch Veränderung einer Fragestellung aus dem inhaltlichen Bereich alle vier Ausprägungen der Handlungsdimension erfasst.

Durch das Verändern von Fragestellungen können alle Handlungsbereiche, die bei den Bildungsstandards vorgesehen sind, trainiert werden.

Viele Aufgaben in herkömmlichen Lehrbüchern können durch minimale – oder auch größere – Änderungen mehrdimensional gemacht werden. Meist finden sich Aufgaben in der Handlungsdimension⁴ „Operieren, Rechnen“ bzw. „Darstellen, Modellbilden“ verwurzelt. Im herkömmlichen Unterricht werden „Interpretieren und Dokumentieren“ und „Argumentieren und Begründen“ stark vernachlässigt. Es sind aber gerade diese Ausprägungen der Handlungsdimension, die die Schüler/innen zum Sprechen über Mathematik benötigen und die zum elementaren Grundwissen gezählt werden. In der Folge wird an einem Beispiel dargestellt, wie durch das Verändern der Dimension durch eine andere Fragestellung das Erwerben und Trainieren weiterer Kompetenzen möglich wird.

Das Aufzeigen verschiedener Lösungswege soll den Blick öffnen für die Gedanken der Schüler/innen. Unterschiedliche Problemlösestrategien können auch zu unterschiedlichen Ergebnissen führen. Der Blick der Lehrperson soll sich auf die Kompetenzen der Schüler/innen, die sie durch ihr Ergebnis mitteilen, richten. Andere Ergebnisse sollen zur Diskussion und Reflexion über mathematische Inhalte, Strategien und Modelle anregen. Falsche Ergebnisse können durch geschickte Fragestellung der Lehrer/innen ein Argumentieren und Begründen auslösen und die Schüler/innen dadurch zu einem richtigen Ergebnis führen, das schlussendlich von ihnen selbst kommt.

⁴ Genauere Informationen zur Handlungsdimension finden sich in der Broschüre: Bildungsstandards für Mathematik am Ende der 8. Schulstufe. Version 3.0, Oktober 2004 (Download: www.gemeinsamlernen.at).

Inhaltsdimension: Arbeiten mit Zahlen und Maßen

Die inhaltliche Dimension „Arbeiten mit Zahlen und Maßen“ umfasst Fähigkeiten in den Bereichen: natürliche, ganze, rationale und irrationale Zahlen, Bruch- und Dezimaldarstellung rationaler Zahlen, Potenzschreibweise; Rechenregeln; Anteile, Prozente, Zinsen; Maße und deren Umwandlungen; Zahlen und Maße in lebenspraktischen Anwendungen.

Eine Aussage im Bereich der rationalen Zahlen kann lauten:

Ein Außenthermometer zeigt in der Früh -3°C und zu Mittag $+4^{\circ}\text{C}$.

Dieser Aufgabenaspekt – angesiedelt in der inhaltlichen Dimension „Arbeiten mit Zahlen und Maßen“ – wird nun mit den unterschiedlichen Ausprägungen der Handlungsdimension verknüpft.

Handlungsdimension: Darstellen, Modellbilden

„Darstellen, Modellbilden“ umfasst die Fähigkeit, ein Problem aus einer bestimmten Situation in die Sprache der Mathematik zu übertragen. Dazu ist erforderlich, den mathematischen Gehalt eines Problems zu erkennen, die benötigten Daten aufzufinden und auszuwählen und sich für einen Lösungsweg zu entscheiden und diesen zu planen. Bei dieser Tätigkeit sollen auch die Möglichkeiten technischer Hilfsmittel genutzt werden.

1. Eine Aufgabe, die Kompetenzen in diesem Bereich erfordert, kann lauten:

Ein Außenthermometer zeigt in der Früh -3°C und zu Mittag $+4^{\circ}\text{C}$.

Stelle diese Aussage in verschiedenen Arten mathematisch dar!

Die Lösungswege könnten folgendermaßen aussehen:

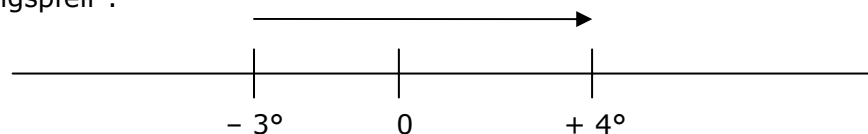
1. verbal: Die Temperatur ist um sieben Grad gestiegen.
Oder: Die Temperatur ist um 7° gestiegen.

2. symbolisch: $-3^{\circ} \rightarrow +4^{\circ}$ oder

$$\begin{array}{c} +4^{\circ} \\ \uparrow \\ -3^{\circ} \end{array}$$

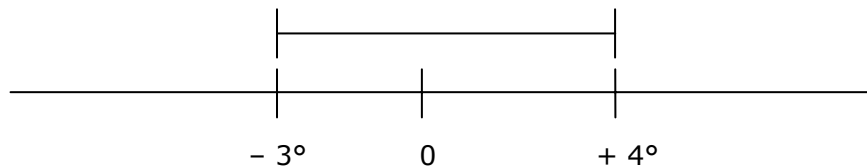
3. grafisch:

■ als „Erwärmungspfeil“:



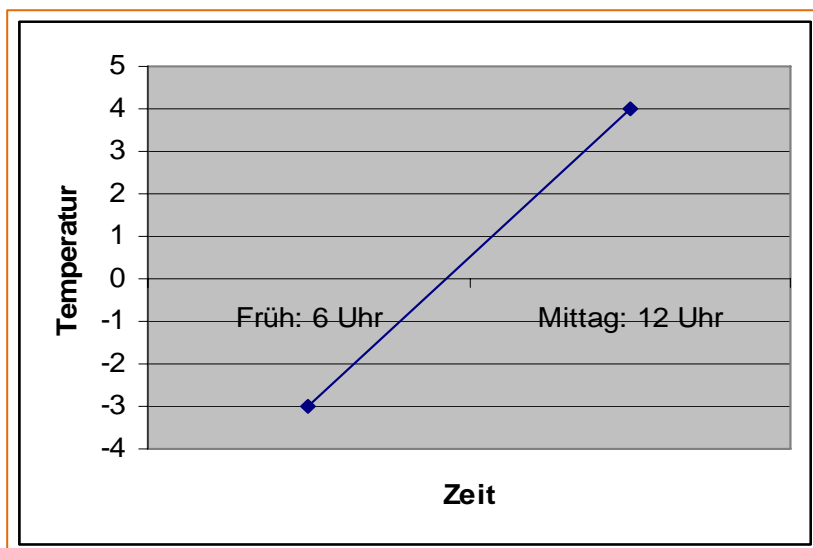
Variationen der Inhalts- und Handlungsdimensionen

■ als Differenz bzw. Unterschied:

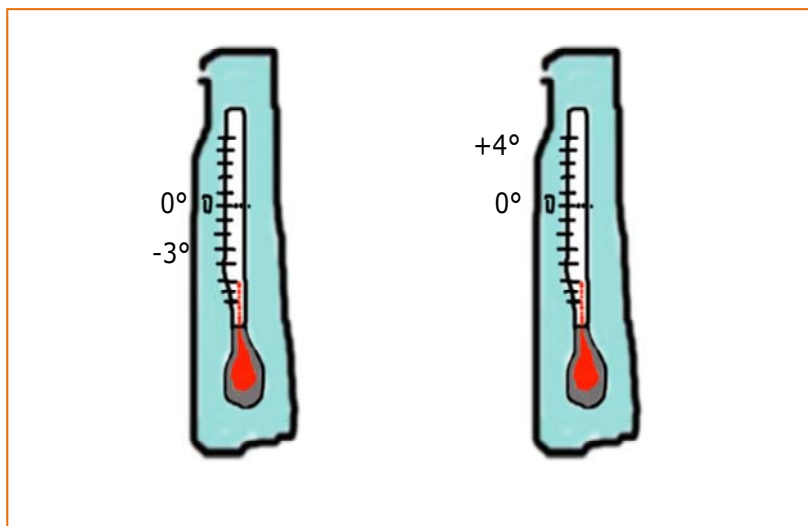


Diese Darstellungen können natürlich auch senkrecht erfolgen.

■ im Koordinatensystem (Temperatur – Zeit)



■ aus dem Alltagsleben:



4. schriftlich – durch Schreiben einer Geschichte

Schüler/innen (7. Schulstufe) antworten:

In der Früh war das Wetter schlecht und das Thermometer zeigt -3° . Zu Mittag scheint die Sonne und es wird ein schöner Wintertag, denn jetzt zeigt es $+4^{\circ}$. Es wurde um 7° wärmer.

Dominik, 3. LG

Die kleine Lisa steht auf und sieht aus dem Fenster. „Der Schnee hat gehalten!“ ruft sie laut. Sie läuft zu ihrer Mutter. Die erklärt, dass der Schnee, der gestern gefallen ist, noch liegt, weil es kalt ist. Lisa will wissen, wie kalt und schaut am Außenthermometer nach. Es hat -3°C . Lisa geht in die Schule. Als Pause ist, ist der Schnee geschmolzen. Das Außenthermometer in der Schule zeigt $+4^{\circ}\text{C}$. Aber Lisa stört das nicht. Sie und ihre Freunde springen in die Pfützen, die der Schnee hinterlassen hat.

Tatjana, 2. LG

Es war einmal ein kleines Außenthermometer. Es lebte im Dschungel bei den Tieren. Niemand interessierte sich dafür, niemand wollte wissen, wie viel Grad es hatte. Es war so traurig, dass das Quecksilber in ihm weit hinunter sank – es zeigte -3° an. Zu Mittag dachte es nicht mehr so viel darüber nach und es hatte schon $+4^{\circ}$. Das kleine Außenthermometer wusste aber nicht, dass es die Grade seiner Laune nach anzeigte und nicht die wirkliche Temperatur. Ein kleines Affenkind hatte das beobachtet. Es erzählte es den anderen Tieren: „Das Außenthermometer zeigt in der Früh -3° und zu Mittag $+4^{\circ}$! Das ist ja viel zu kalt! Wir müssen es aufheitern, sonst erfrieren wir!“ So kamen die Tiere des Dschungels nun jeden Tag und fragten nach der Temperatur und unterhielten sich mit dem Thermometer. Das Thermometer wurde ganz glücklich und zeigte von nun an die richtige Temperatur.

Janina, 1. LG

Schreiben verlangsamt die Gedanken, und dies kann bestimmten Lerntypen helfen, ihre Überlegungen besser darzustellen. Durch Einkleiden der Fragestellung bzw. der Lösungsstrategie in eine Geschichte kann oft klarer erkannt werden, ob das eigentliche Problem verstanden wurde, bzw. wird offensichtlicher, wo der Gedankenfehler liegt. Viele anregende Ideen zur Verknüpfung von Sprache und Mathematik finden sich bei Urs Ruf und Peter Gallin (RUF/GALLIN 2005).

- 2.** Eine ganz andere Art der Fragestellung im Bereich „Darstellen, Modellbilden“ ist die Aufforderung:

Erfinde eigene Aufgabenstellungen mit Temperaturangaben zu den verschiedenen Jahreszeiten!

Schüler/innen antworten (7. Schulstufe):

Ergänze die fehlenden Felder:

Früh	Mittag	Jahreszeit
+ 1°	+ 12°	
	+ 15°	Herbst
		Sommer
- 8°		Winter

Stefanie, 2. LG

Variationen der Inhalts- und Handlungsdimensionen

Es ist ein Tag im Winter. Am Morgen zeigt das Thermometer -5° , zu Mittag $+2^\circ$.
Was zeigt es am Abend an?

Marcus, 3. LG

In der Früh zeigt das Thermometer $+8^\circ$ C. Im Laufe des Tages verändert es sich um höchstens 2° C. Welche Jahreszeit ist das?

Diana, 1. LG

Das Erfinden eigener Aufgabenstellungen fördert den Prozess des Modellierens, da die Schüler/innen in einen Gedankenprozess versetzt werden, bei dem durch einen Wechsel zwischen Realität und Mathematik Modelle entstehen (können). Andererseits bekommen Aufgaben dieser Art einen starken „Aufforderungscharakter“ (LEUDERS, 2001), da die Schüler/innen in eine Handlungssituation versetzt werden.

Handlungsdimension: Operieren, Rechnen

Die Handlungsdimension „Operieren, Rechnen“ bestimmt zum Großteil unseren Mathematikunterricht. Sie umfasst die Fähigkeit, Verfahren, Rechenmethoden, Techniken oder Konstruktionsverfahren, die für das mathematische Problem eine Lösung ergeben, auf richtige, effiziente und sinnvolle Weise anzuwenden. Damit reicht diese Kompetenz über die reine Rechenfertigkeit hinaus. Eine Lösung kann beispielsweise auch durch Visualisierung oder durch Verwendung von Tabellen gefunden werden. Je nach Verfügbarkeit sollen dazu auch elektronische Werkzeuge genutzt werden.

Eine übliche Aufgabe lautet:

**Ein Außenthermometer zeigt in der Früh -3°C und zu Mittag $+4^\circ\text{C}$.
Gib den Temperaturunterschied an!**

Lösung: Der Temperaturunterschied beträgt 7°C .

Hinter dieser Lösung können sich verschiedene Denkstrategien verbergen:

1. Berechnen der Differenz bzw. die Subtraktion einer negativen Zahl:

$$4 - (-3) = 7$$

2. Rechnen mit Beträgen:

$$0 \text{ bis } |-3| = \text{Abstand } 3 \text{ und } 0 \text{ bis } |+4| = \text{Abstand } 4 \rightarrow 3 + 4 = 7$$

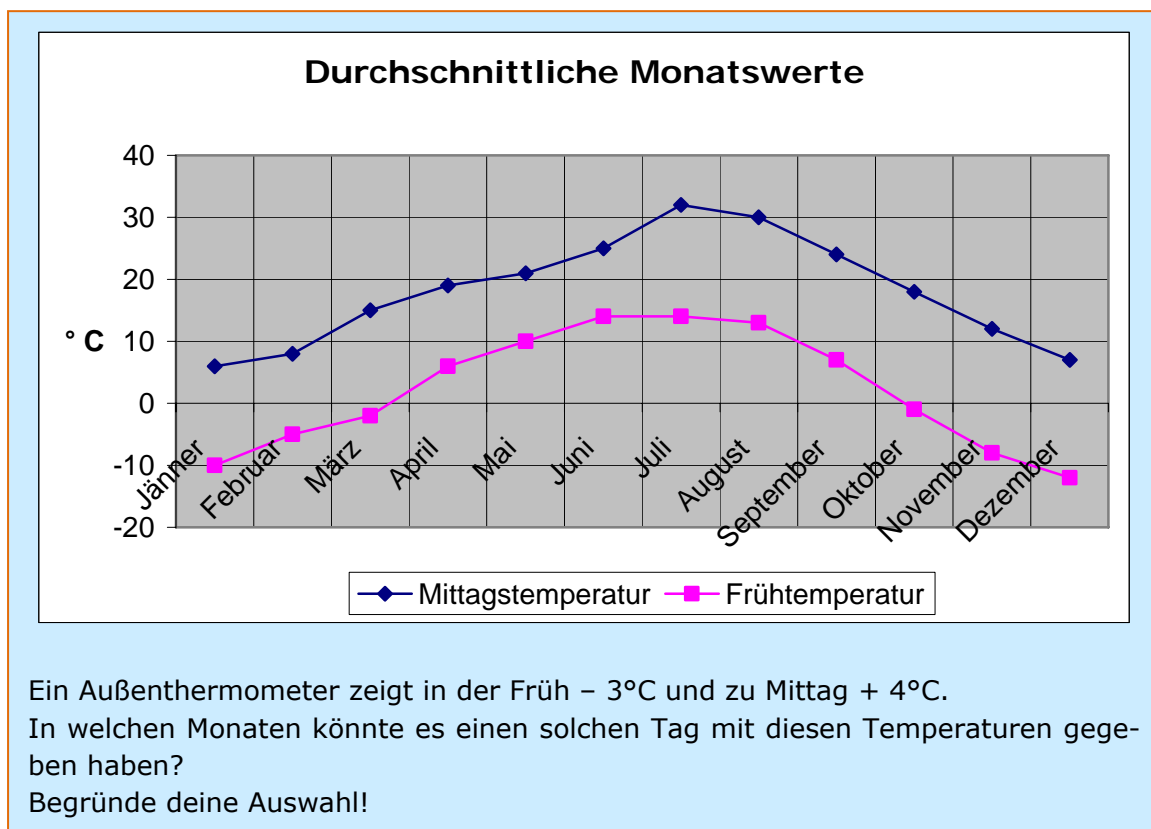
3. Zählstrategie: „Welchen Wert muss ich zu -3 addieren, um $+4$ zu erhalten?“

Diese Denkstrategien finden sich in den Antworten der Schüler/innen bestätigt (siehe Argumentieren und Begründen).

Handlungsdimension: Interpretieren und Dokumentieren

Diese Ausprägung der Handlungsdimension umfasst die Fähigkeit, mathematische Ergebnisse zu verbalisieren, wie etwa:

- die Analyse der Brauchbarkeit des Modells;
- das innermathematische Überprüfen der Korrektheit der Lösung;
- das Untersuchen der Brauchbarkeit der mathematischen Lösung für das praktische Problem;
- die Dokumentation des Lösungsweges und des Ergebnisses;
- das Interpretieren von Ergebnissen verwendeter technischer Hilfsmittel.



Schüler/innen antworten (7. Schulstufe):

Im Jänner, Februar, November und Dezember sicher, weil es in der Früh noch kälter und zu Mittag noch wärmer war.

Anna, 3. LG

Jänner, Februar, November, Dezember. Vielleicht auch noch im März – doch das kann ich in der Zeichnung nicht ganz genau erkennen.

Sarah, 1. LG

Ich sehe die Linien der Temperaturen und überlege, wo minus 3 und plus 4 drinnen sein kann, und dann bleiben Jänner, Februar, März, November und Dezember übrig.

Christoph, 2. LG

Variationen der Inhalts- und Handlungsdimensionen

Handlungsdimension: Argumentieren und Begründen

„Argumentieren und Begründen“ umfasst die Fähigkeit, mathematische Probleme unter Verwendung der Fachsprache argumentativ zu behandeln, umfasst alle Aktivitäten, die mit Argumentieren, mit Begründen und mit Beweisen zu tun haben. Dies inkludiert auch ein Argumentieren betreffend die Entscheidung für ein bestimmtes Modell oder für einen bestimmten Algorithmus, eine gerade bei Verwendung elektronischer Werkzeuge wichtige Tätigkeit.

Ein Außenthermometer zeigt in der Früh – 3°C und zu Mittag + 4°C.

Beschreibe mit eigenen Worten – evtl. unterstützt durch Rechnungen –, wie du zu einem Ergebnis kommst!

Schüler/innen antworten (7. Schulstufe):

Das Thermometer ist wie ein Zahlenstrahl. Ich lege ihn vor mich hin und zähle die Grade (Schritte), die von minus 3° zu plus 4° führen. Das sind 7 Grade oder 7 Schritte.

Walter, 2. LG

Ich weiß, dass es 7 Grad sind, um die die Temperatur steigt. Ich versuche es als Rechnung darzustellen: $(-3) + (+4) = -3 + 4 = -1$, so kann ich es nicht rechnen, denn da kommt eine falsche Zahl heraus, also muss ich es anders versuchen. $(-3) - (+4) = -3 - 4 = -7$ das ist schon beinahe richtig, aber kann man schreiben minus 7, wenn die Temperatur steigt? Da muss es ja dann plus 7 heißen! $(+3) + (+4) = +3 + 4 = +7$, jetzt stimmt es! Aber die Rechnung gefällt mir nicht, denn es sind ja in der Früh minus 3 Grad. Das kann man wahrscheinlich gar nicht mit + und - rechnen: dann halt nur die Grade: $3 + 4 = 7$.

Tobias, 1. LG

Es muss Frühling sein, weil der Morgen im Frühling noch kalt ist und die Tage ein bisschen wärmer sind.

Tanja, 3. LG

Wenn Schüler/innen mit eigenen Worten beschreiben, wie sie zu ihren Ergebnissen kommen und/oder was sie sich dabei denken, lässt das einerseits interessante Rückschlüsse auf ihr konstruktives Denkvermögen zu, andererseits werden sie angeregt, selbst über ihre Denkweise zu reflektieren und ihre Entscheidungen zu hinterfragen.